**Punti notevoli di un triangolo – Parte Prima**

di Antonino Giambò

**1.** Quando si parla di punti notevoli di un triangolo, spesso se non sempre, vengono in mente i quattro punti più conosciuti: incentro, baricentro, circocentro, ortocentro.

In realtà, quelli che si possono definire "punti notevoli" di un triangolo sono molti di più. Del resto, ne ho mostrato alcuni esempi in precedenti articoli pubblicati su questa stessa rubrica, come, giusto per citarne qualcuno, il punto di Lemoine, il punto di Fermat-Torricelli, il punto di Feuerbach.

Questi punti possono essere interni al triangolo o sul suo perimetro o anche esterni: dipende dal tipo di triangolo.

Per comodità dell'eventuale lettore che potrebbe essere, come mi auguro e spero, uno studente di scuola secondaria, ritorno dapprima sui punti già descritti in precedenti articoli, richiamando comunque gli articoli medesimi, anche per dare la possibilità a chi lo desiderasse di rivedere dimostrazioni e/o verifiche di alcune proprietà di tali punti.

Poi mi occuperò di altri punti notevoli del triangolo, ma senza la pretesa di esaurirli tutti.

**2.** Incominciamo con i 4 punti più celebri.

- **Incentro**. È il punto I in cui s'incontrano le bisettrici degli angoli interni del triangolo (figura 1). È il centro del cerchio inscritto nel triangolo ed è sempre, qualunque sia il triangolo, un punto interno ad esso.

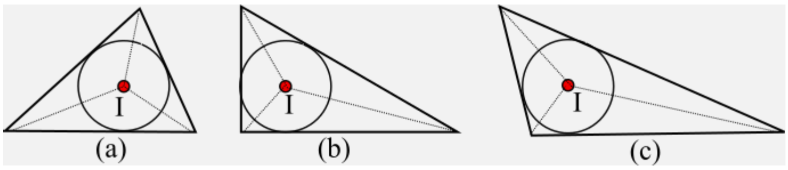


figura 1

- **Baricentro**. È il punto G in cui s'incontrano le mediane del triangolo (figura 2). Anch'esso è sempre un punto interno al triangolo. Ha la caratteristica di dividere ciascuna mediana in due parti, delle quali quella che comprende il vertice è doppia dell'altra.

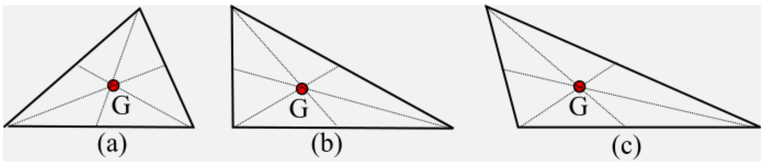


figura 2

- **Circocentro**. È il punto K in cui s'incontrano gli assi del triangolo (figura 3). È il centro del cerchio circoscritto al triangolo e può essere un punto interno al triangolo (se il triangolo è acutangolo) o situato sul suo perimetro (se il triangolo è rettangolo: è esattamente il punto medio dell'ipotenusa) oppure esterno ad esso (se il triangolo è ottusangolo).

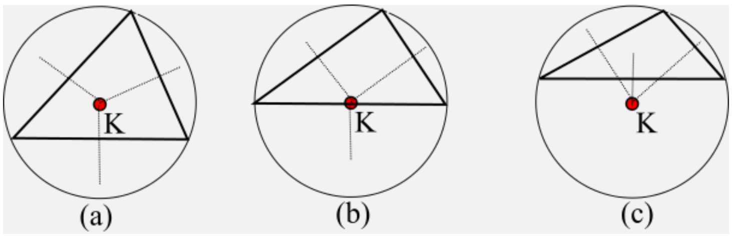


figura 3

- **Ortocentro**. È il punto H in cui s’incontrano le altezze del triangolo (figura 4). Può essere un punto interno al triangolo (se il triangolo è acutangolo) o situato sul suo perimetro (se il triangolo è rettangolo: è esattamente il vertice dell’angolo retto) o esterno ad esso (se il triangolo è ottusangolo).

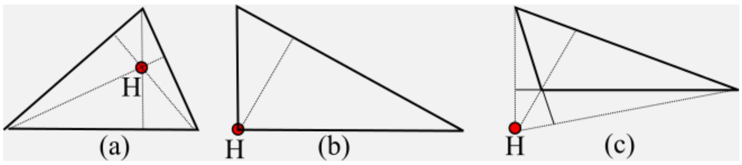


figura 4

Si presentano delle situazioni particolari quando il triangolo è isoscele o equilatero. Nel primo caso i 4 punti sono tutti situati sull’altezza del triangolo propriamente detta (figura 5); nel secondo caso i 4 punti coincidono e il punto in cui sono riuniti è denominato **centro** del triangolo.

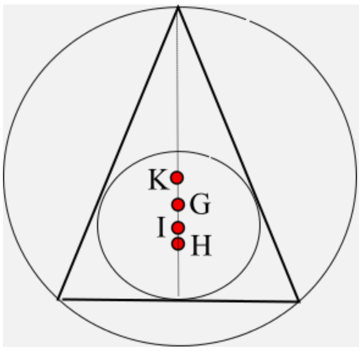


figura 5

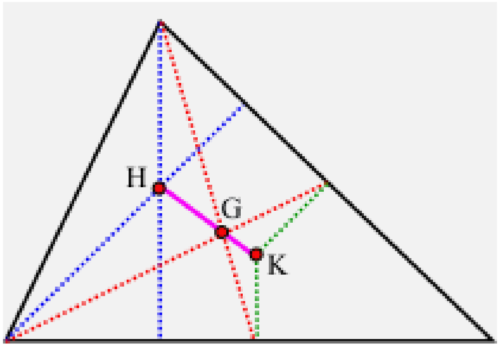


figura 6

A parte queste particolari situazioni, tre dei quattro punti sono comunque allineati: sono l’ortocentro H, il baricentro G e il circocentro K (figura 6).

La retta che li contiene è denominata *retta di Eulero* e risulta $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GK}$. Ne ho trattato sia nell’articolo *Proprietà di figure geometriche* sia nell’articolo *Il triangolo mediale*.

**3.** Altri punti notevoli del triangolo, dei quali mi sono occupato in precedenti articoli, sono i seguenti:

- Gli **ex-centri**, cioè i centri $E_A, E_B, E_C$ dei cerchi ex-inscritti al triangolo (figura 7). Ogni ex-centro è il punto in cui convergono la bisettrice di un angolo interno del triangolo e le bisettrici dei due angoli esterni non adiacenti. Ne ho accennato nel succitato articolo sul triangolo mediale.

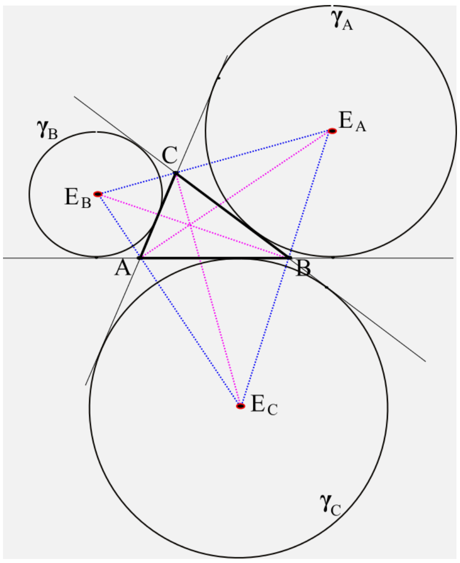


figura 7

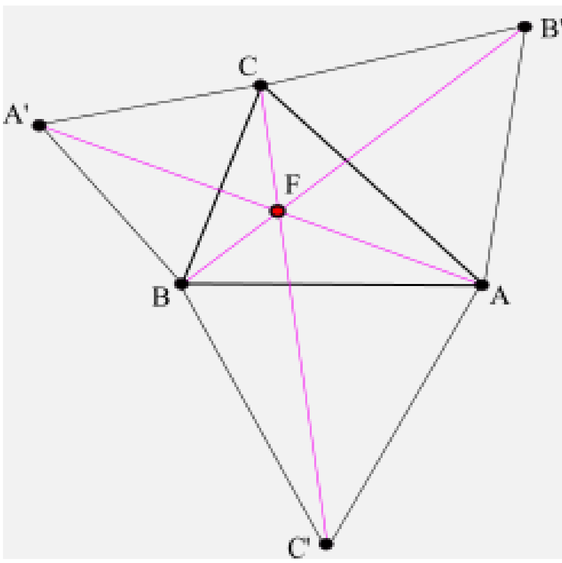


figura 8

- Il **punto di Fermat-Torricelli**. Considerato un triangolo ABC, i cui angoli interni hanno tutti ampiezza minore di 120°, si costruiscono sui suoi lati ed esternamente ad esso i tre triangoli equilateri ABC', BCA', CAB'. Le rette AA', BB', CC' s'incontrano nel punto F. Questo punto è denominato punto di Fermat-Torricelli (figura 8). Ne ho scritto in due articoli (*Massimi e minimi con stile euclideo*, *Teoremi vari di geometria*).

- I **nove punti del cerchio di Feuerbach**. Ricordo (vedi articolo *Il triangolo ortico*) che i punti sono i 3 punti medi dei lati del triangolo, i piedi delle 3 altezze e i punti medi dei segmenti che congiungono l'ortocentro del triangolo con i suoi 3 vertici (figura 9).

Anche **il centro W di questo cerchio** è un punto notevole del triangolo e si trova anch'esso sulla retta di Eulero ed è precisamente il punto medio del segmento avente per estremi l'ortocentro H e il circocentro K del triangolo. Ho affrontato la questione in diversi articoli (*Il triangolo ortico*, *Il triangolo mediale*, *Due teoremi di Feuerbach e altro*).

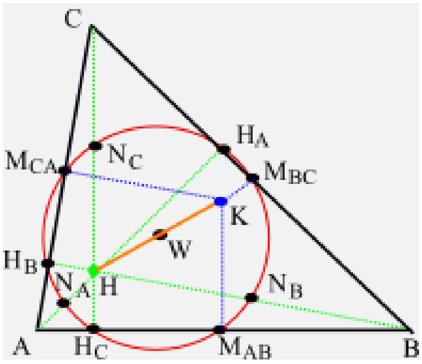

figura 9

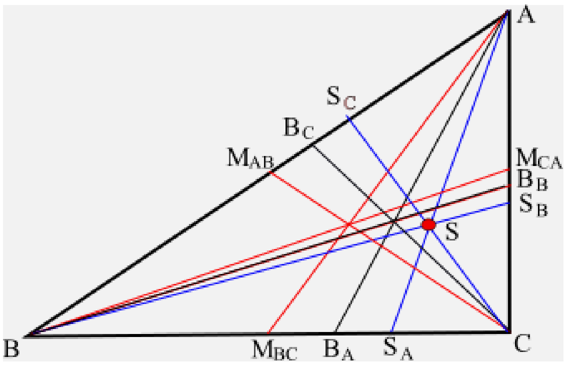

figura 10

- Il **punto simmediano** (o **punto di Lemoine**). È il punto S in cui convergono le simmediane di un triangolo (figura 10), ossia le simmetriche ($AS_A, BS_B, CS_C$) delle mediane ($AM_{BC}, BM_{CA}, CM_{AB}$) rispetto alle bisettrici ($AB_A, BB_B, CB_C$) che escono dallo stesso vertice. L'argomento è stato affrontato in tre articoli: *Proprietà di figure geometriche*, *Proprietà del punto simmediano – Parti prima e seconda*.

- Il **punto di Feuerbach**. È il punto X nel quale si toccano il cerchio inscritto nel triangolo ABC di riferimento e il cerchio dei nove punti (figura 11). Ho accennato a questo punto in due articoli (*Il triangolo mediale*, *Due teoremi di Feuerbach e altro*).

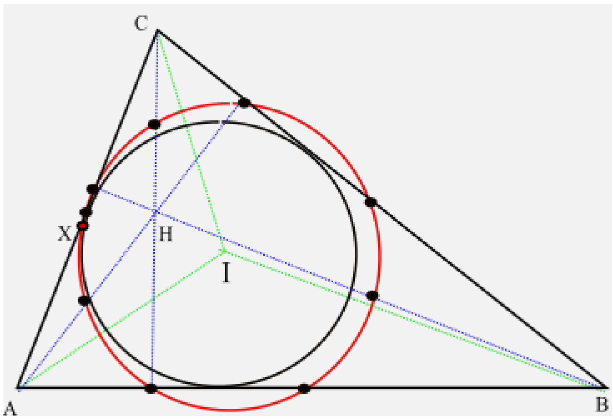

figura 11

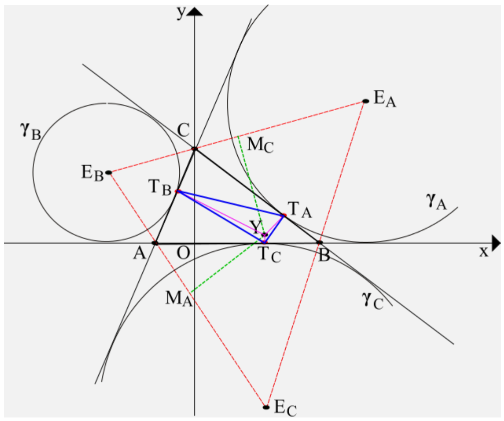

figura 12

- Il **punto di Bevan**. È il circocentro Y del triangolo avente per vertici i centri dei cerchi ex-inscritti al triangolo di riferimento (figura 12). Ha la seguente interessante caratteristica: il triangolo pedale di Y rispetto al triangolo di riferimento ABC è il triangolo $T_AT_BT_C$ avente per vertici i punti in cui i lati del triangolo ABC toccano i cerchi ex-inscritti al triangolo. Ho fatto un cenno a questo punto nell'articolo *Il triangolo pedale* e ho fornito una verifica della proprietà nell'articolo *Due teoremi di Feuerbach e altro*.

**4.** Prendiamo adesso in esame altri punti notevoli di un triangolo, quattro per l'esattezza.

- Il **punto di Gergonne**. Considerato un triangolo ABC, siano $T_1, T_2, T_3$ i punti in cui i suoi lati toccano il cerchio inscritto (figura 13). Si dimostra che le tre ceviane $AT_1, BT_2, CT_3$ convergono in uno stesso punto J.

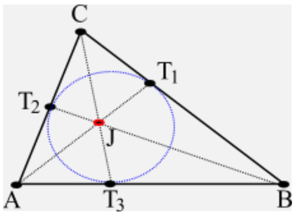


figura 13

Ai fini della dimostrazione, si costata che, trattandosi di segmenti tangenti condotti da un punto ad una circonferenza, si ha: $AT_2=AT_3$, $BT_1=BT_3$, $CT_1=CT_2$. Risulta pertanto:

$$\frac{AT_3}{T_3B}\cdot\frac{BT_1}{T_1C}\cdot\frac{CT_2}{T_2A}=1.$$

Cosicché, in virtù del teorema di Ceva, le tre ceviane $AT_1, BT_2, CT_3$ convergono in uno stesso punto J.

Questo punto è denominato *punto di Gergonne* (1).

A beneficio di chi non lo ricordasse, riporto l'enunciato del teorema di Ceva, che ho avuto modo comunque di enunciare e dimostrare nell'articolo *Proprietà di figure geometriche*.

TEOREMA DI CEVA. Dato un qualsiasi triangolo ABC, condizione necessaria e sufficiente affinché le tre ceviane AD, BE, CF convergano in un punto è che risulti:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Ricordo pure che dicesi *ceviana* di un triangolo ogni segmento che congiunge un vertice con un punto del lato opposto.

- Il **punto di Nagel**. Considerato un triangolo ABC, siano $T_A, T_B, T_C$ i punti in cui i suoi lati toccano i cerchi ex-inscritti ad esso. Si dimostra che i tre segmenti $AT_A, BT_B, CT_C$ convergono in uno stesso punto N (figura 14). Questo punto è denominato *punto di Nagel* (2).

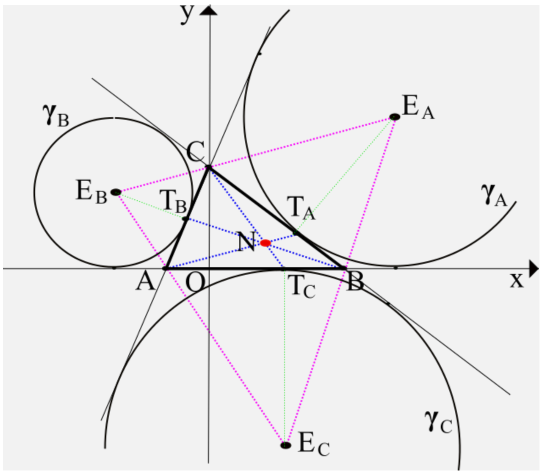


figura 14

Verifichiamo ciò in un caso numerico scelto in modo conveniente. Precisamente facciamo riferimento al triangolo ABC, per i cui lati ho scelto le seguenti lunghezze:

---

[1] Joseph Diaz Gergonne, matematico francese, 1771-1859. È noto, tra l'altro, per aver fondato la prima rivista dedicata alla Matematica, il periodico *Annales des mathématiques pures et appliquées*.

[2] Christian Heinrich von Nagel, matematico tedesco, 1803-1882. Si distinse proprio nello studio dei punti notevoli di un triangolo.

$$\overline{AB}=c=21,\ \ \overline{BC}=a=20,\ \ \overline{CA}=b=13.$$

Il triangolo è riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'origine O è il piede dell'altezza del triangolo condotta per C, l'asse x è la retta AB orientata da A verso B e ovviamente l'asse y è la retta LC orientata da L verso C (figura 14).

Con questa scelta i vertici del triangolo hanno le seguenti coordinate:

$$A(-5,0),\ \ B(16,0),\ \ C(0,12).$$

Per prima cosa troviamo le equazioni delle rette dei lati. Cosa di per sé abbastanza semplice. Si ha:

$$AB\equiv y=0\,,\ \ BC\equiv 3\,x+4\,y-48=0\,,\ \ CA\equiv 12\,x-5\,y+60=0\,.$$

Diciamo adesso:

- $\gamma_A$ il cerchio tangente al lato BC e al prolungamento degli altri due lati,
- $\gamma_B$ il cerchio tangente al lato CA e al prolungamento degli altri due lati,
- $\gamma_C$ il cerchio tangente al lato AB e al prolungamento degli altri due lati.

Sono questi i tre cerchi ex-inscritti al triangolo. Troviamo le coordinate dei loro centri $E_A, E_B, E_C$.

Bisogna tener presente che questi centri sono situati sulle bisettrici degli angoli esterni del triangolo ABC.

Ho avuto modo di trovare le equazioni di queste bisettrici in un precedente articolo (*Due teoremi di Feuerbach e altro*), per cui rimando a quell'articolo chi avesse bisogno di controllare il procedimento. Qui mi limito a riportare le equazioni di tali bisettrici.

Le bisettrici degli angoli esterni di vertici A, B, C sono nell'ordine le seguenti:

$$b'_A\equiv 3\,x+2\,y+15=0\,,\ b'_B\equiv\ 3\,x-y-48=0\,,\ \ b'_C\equiv 3\,x-11\,y+132=0\,.$$

Possiamo quindi trovare le coordinate dei centri delle suddette circonferenze.

- Il centro $E_A$ è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in B e in C:

  $E_A{=}b'_B{\cap}b'_C:\begin{cases}3\,x-y-48=0\\3\,x-11\,y+132=0\end{cases}$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_A(22,18)$.

- Il centro $E_B$ è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in C e in A:

  $E_B=b'_C\cap b'_A:\begin{cases}3\,x-11\,y+132=0\\3\,x+2\,y+15=0\end{cases}$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_B(-11,9)$.

- Il centro $E_C$ è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in A e in B:

  $E_C{=}b'_A{\cap}b'_B:\begin{cases}3\,x+2\,y+15=0\\3\,x-y-48=\ 0\end{cases}$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_C(9,-21)$.

Si possono calcolare le coordinate dei punti $T_A, T_B, T_C$, in cui i cerchi rispettivamente $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$, toccano i lati del triangolo ABC. Basta considerare che essi sono i piedi delle perpendicolari condotte dai centri dei cerchi ai lati tangenti.

- La perpendicolare $p_A$, condotta da $E_A$ al lato BC ha la seguente equazione:

$$p_A\equiv y-18=\frac{4}{3}(x-22)\ \ \text{vale a dire:}\ \ 4\,x-3\,y-34=0\,.$$

- La perpendicolare $p_B$, condotta da $O_2$ al lato CA ha la seguente equazione:

$$p_B\equiv y-9=-\frac{5}{12}(x+11)\ \ \text{vale a dire:}\ \ 5\,x+12\,y-53=0\,.$$

- La perpendicolare $p_C$, condotta da $O_3$ al lato AB ha la seguente equazione:

$$p_C\equiv x=9\,.$$

Possiamo adesso trovare le coordinate dei punti di contatto.

- $T_A=p_A\cap BC:\begin{cases}4x-3y-34=0\\3\,x+4\,y-48=0\end{cases}$ da cui: $T_A\left(\frac{56}{5},\frac{18}{5}\right)$.
- $T_B=p_B\cap CA:\begin{cases}5\,x+12\,y-53=0\\12\,x-5\,y+60=0\end{cases}$ da cui: $T_B\left(-\frac{35}{13},\frac{72}{13}\right)$.
- $T_C=p_C\cap AB:\begin{cases}x=9\\y=0\end{cases}$ da cui: $T_C(9,0)$.

Rimane da verificare che le rette $AT_A, BT_B, CT_C$ convergono in uno stesso punto. Si potrebbe ricorrere al teorema di Ceva, ma preferiamo seguire un altro procedimento.

Precisamente troviamo prima di tutto le equazioni di quelle rette e poi facciamo vedere che hanno un punto in comune. Allora:

- $AT_A \equiv \dfrac{y-0}{\frac{18}{5}-0} = \dfrac{x+5}{\frac{56}{5}+5}$ ossia: $y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{10}{9}$.
- $BT_B \equiv \dfrac{y-0}{\frac{72}{13}-0} = \dfrac{x-16}{-\frac{35}{13}-16}$ ossia: $y = -\dfrac{8}{27}x + \dfrac{128}{27}$.
- $CT_C \equiv \dfrac{y-12}{0-12} = \dfrac{x-0}{9-0}$ ossia: $y = -\dfrac{4}{3}x + 12$.

Intersechiamo le due rette $AT_A$ e $CT_C$ e denominiamo con N il loro punto comune:

$$N = AT_A \cap CT_C: \begin{cases} y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{10}{9} \\ y = -\dfrac{4}{3}x + 12 \end{cases} \quad \text{da cui segue:} \quad N\left(7, \frac{8}{3}\right).$$

Si verifica facilmente che questo punto N appartiene anche alla retta $BT_B$.

Resta così verificato che le rette $AT_A, BT_B, CT_C$ convergono in uno stesso punto, il punto N di Nagel.

Il punto di Nagel di un triangolo ha quest'altra proprietà generale, che può essere verificata nella situazione particolare già presa in considerazione:

È allineato con l'incentro $I\left(2, \frac{14}{3}\right)$ e il baricentro $G\left(\frac{11}{3}, 4\right)$ del triangolo e risulta inoltre $\overrightarrow{NG} = 2\,\overrightarrow{GI}$.

- Il **punto di Spieker** [3]. Considerato un triangolo ABC, siano $M_{AB}, M_{BC}, M_{CA}$ i punti medi dei lati AB, BC, CA. L'incentro Z del triangolo $M_{AB}M_{BC}M_{CA}$ si denomina *punto di Spieker* (figura 15)

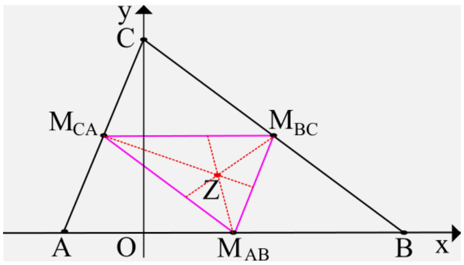


figura 15

Ragionando sul solito caso particolare, si può verificare che il punto di Spieker del triangolo è il punto:

$$Z\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{3}\right).$$

Si costata il fatto seguente, che vale comunque in generale: il punto Z di Spieker è il punto medio del segmento NI, essendo I l'incentro del triangolo ABC ed N il punto di Nagel di questo triangolo. Quindi: $\overrightarrow{NZ} = \overrightarrow{ZI}$.

Questo implica che sono allineati i 4 punti N, Z, G, I, essendo G il baricentro del triangolo.

D'altro canto, siccome $\overrightarrow{NG} = 2\,\overrightarrow{GI}$, si dimostra facilmente che è: $\overrightarrow{NZ} = 3\,\overrightarrow{ZG}$.

- Il **MittenPunkt**. Considerato un triangolo ABC, siano $E_A, E_B, E_C$ i centri dei cerchi ad esso ex-inscritti.

Il punto simmediano M del triangolo $E_AE_BE_C$ è denominato *MittenPunkt* [4].

Nel solito triangolo (figura 16) riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ed i cui vertici hanno le seguenti coordinate: $A(-5,0)$, $B(16,0)$, $C(0,12)$, si trova [5] che il MittenPunkt è il punto M tale che:

---

[3] Theodor Spieker, matematico tedesco, 1823-1913.

[4] È un termine tedesco che significa letteralmente "punto intermedio". Anche questo punto è stato individuato da von Nagel.

[5] Il procedimento per trovare il simmediano di un triangolo è stato esposto nell'articolo *Proprietà del punto simmediano – Parte prima*.

$$M\left(\frac{79}{16}, \frac{27}{8}\right).$$

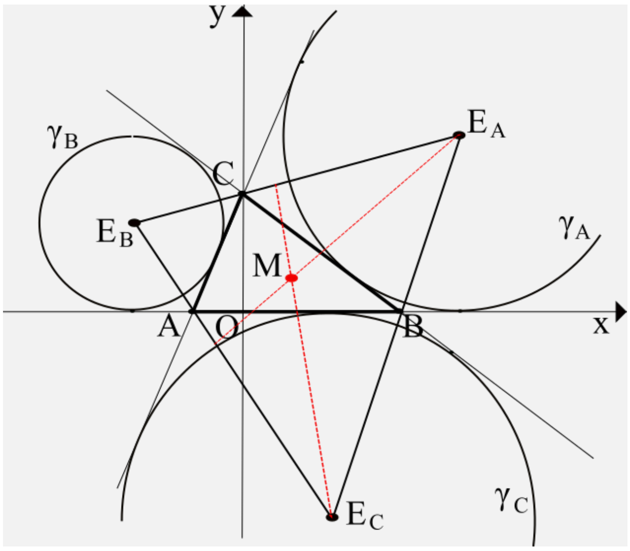


figura 16

Si può verificare che il punto M è tale che risulti: $\overrightarrow{JG} = 2\,\overrightarrow{GM}$, essendo $J\left(\frac{9}{8}, \frac{21}{4}\right)$ e $G\left(\frac{11}{3}, 4\right)$ rispettivamente il punto di Gergonne e il baricentro del triangolo ABC.

**5.** Concludo con alcune considerazioni, che mi sembrano interessanti.

- Ci è capitato più volte, durante lo svolgimento di questo articolo, di imbatterci in una coppia di punti P, Q tali che $\overrightarrow{PG} = 2\,\overrightarrow{GQ}$, dove G è il baricentro del triangolo di riferimento ABC. In questi casi si dice che il punto Q è ***complementare*** del punto P rispetto al triangolo ABC.

Alcuni esempi:

- essendo $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GM_A}$ , il punto medio $M_A$ del lato BC è il punto complementare del vertice A;
- essendo $\overrightarrow{BG} = 2\,\overrightarrow{GM_B}$ , il punto medio $M_B$ del lato CA è il punto complementare del vertice B;
- essendo $\overrightarrow{CG} = 2\,\overrightarrow{GM_C}$ , il punto medio $M_C$ del lato AB è il punto complementare del vertice C;
- essendo $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GK}$, il circocentro K è il punto complementare dell'ortocentro H;
- essendo $\overrightarrow{NG} = 2\,\overrightarrow{GI}$, l'incentro I è il punto complementare del punto N di Nagel;
- essendo $\overrightarrow{JG} = 2\,\overrightarrow{GM}$, il MittenPunkt è il punto complementare del punto J di Gergonne.

Sono esempi che abbiamo già avuto occasione di dimostrare in alcuni casi e di verificare in altri casi, con riferimento al solito triangolo. Ma si possono verificare altri due esempi, sempre riferiti al solito triangolo.

Precisamente, una volta calcolato che si ha:

$$K\left(\frac{11}{2}, \frac{8}{3}\right), \quad W\left(\frac{11}{4}, \frac{14}{3}\right),$$

e ricordato che:

$$I\left(2, \frac{14}{3}\right), \quad G\left(\frac{11}{3}, 4\right), \quad Z\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{3}\right),$$

- risulta $\overrightarrow{IG} = 2\,\overrightarrow{GZ}$, per cui il punto Z di Spieker è il punto complementare dell'incentro I;
- risulta $\overrightarrow{KG} = 2\,\overrightarrow{GW}$, per cui il centro W del cerchio di Feuerbach è il complementare del circocentro K.

Quanto appena detto implica che le rette $AM_A$, $BM_B$, $CM_C$, HKW, NIZ, JM convergono tutte nel punto G.

- Una figura particolare, riferita al solito triangolo ABC (figura 17), mostra qualcosa di interessante.

Essa rappresenta la distribuzione dei punti notevoli interni al triangolo o situati sul suo perimetro ed elencati in questo articolo, e precisamente, oltre ai vertici A, B, C del triangolo: l'incentro I, il baricentro G, il circocentro K, l'ortocentro H, il punto F di Fermat-Torricelli, i nove punti $M_A, M_B, M_C, N_A, H_B, H_C, N_A, N_B, N_C$ del cerchio di Feuerbach e il centro W di questo cerchio, i punti $T_1, T_2, T_3$, in cui il cerchio inscritto nel triangolo tocca i suoi lati, i punti $T_A, T_B, T_C$, in cui i cerchi ex-inscritti al triangolo toccano i suoi lati, il simmediano S, il punto X di Feuerbach, il punto Y di Bevan, il punto J di Gergonne, il punto N di Nagel, il punto Z di Spieker, il MittenPunkt M.

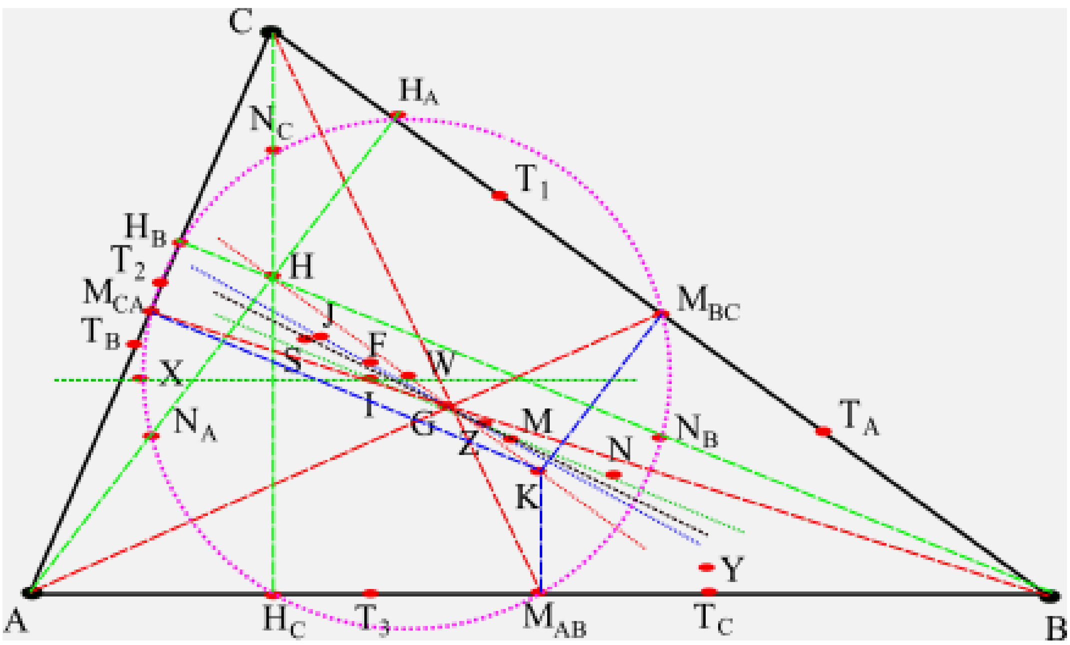


figura 17

La rappresentazione riassume, evidenziandole, alcune delle proprietà di tali punti, alle quali si è fatto cenno nello sviluppo dell'articolo.

Altri punti notevoli non sono stati rappresentati, come i sei punti in cui i lati del triangolo sono intersecati dal primo cerchio di Lemoine o gli altri sei in cui sono intersecati dal secondo cerchio di Lemoine. O ancora, i tre punti, diversi dai vertici, in cui le simmediane del triangolo intersecano i suoi lati.

Ci sono poi punti esterni che pure non sono stati rappresentati, come i centri dei cerchi ex-inscritti.

E vi sono comunque altri punti di cui non ci siamo occupati.