Punti notevoli di un triangolo – Parte Seconda

di Antonino Giambò

1. Assegnato un triangolo ABC in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è noto che le coordinate del suo baricentro G possono essere espresse per mezzo delle coordinate dei sui vertici.

In particolare, se $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ sono le coordinate rispettivamente dei vertici A, B, C, le coordinate (x_G, y_G) del **baricentro** sono le seguenti:

(1) $$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

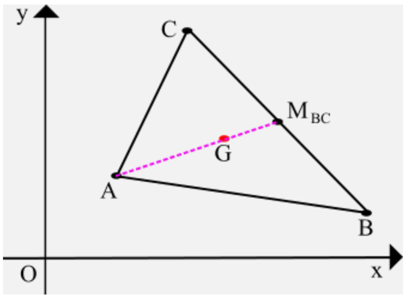

figura 1

La dimostrazione è elementare: basta ricordare infatti che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra. Pertanto (figura 1), considerata per esempio la mediana AM_{BC}, risulta $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GM}_{BC}$. Ossia, passando alle componenti cartesiane dei vettori:

$$x_G - x_A = 2\left(x_{M_{BC}} - x_G\right),$$
$$y_G - y_A = 2\left(y_{M_{BC}} - y_G\right).$$

Da qui, tenuto presente che M_{BC} è il punto medio del lato BC e che le sue coordinate sono:

$$x_{M_{BC}} = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_{M_{BC}} = \frac{y_B + y_C}{2},$$

dopo semplici elaborazioni, seguono le (1).

In realtà, le coordinate di ogni punto notevole del triangolo possono essere espresse mediante le coordinate dei suoi vertici. A volte in modo del tutto banale, come nel caso dei punti medi dei lati del triangolo. Altre volte in modo non banale ma comunque semplice, come nel caso del baricentro, o nei casi in cui si ha a che fare con una coppia di punti P, Q, tali che Q sia *complementare* di P, per cui $\overrightarrow{PG} = 2\,\overrightarrow{GQ}$, ma a condizione che si conoscano le coordinate di uno dei due punti P, Q, oltre a quelle di G. Altre volte, infine, con procedimenti che, se non sono concettualmente difficili, sono però noiosi e lunghi per la complessità dei calcoli.

Bisogna aggiungere che, come nel caso del baricentro e dei punti medi dei lati, per altri punti esistono vere e proprie formule che determinano le coordinate cartesiane dei punti stessi: ce ne occuperemo fra breve.

Per i punti, le cui coordinate sono espresse da formule, si può ricorrere appunto – volendo, ma non necessariamente – a queste formule. Per gli altri punti bisogna affrontare la situazione di volta in volta.

2. Alcuni punti, delle cui coordinate esistono apposite formule, sono i punti D_A, D_B, D_C, in cui le bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC incontrano i lati opposti BC, CA, AB rispettivamente (figura 2).

Le formule sono esattamente le seguenti, dove a, b, c sono nell'ordine le lunghezze dei lati BC, CA, AB:

(2) $$\begin{cases} x_{D_A} = \dfrac{b\,x_B + c\,x_C}{b + c}, & y_{D_A} = \dfrac{b\,y_B + c\,y_C}{b + c}; \\ x_{D_B} = \dfrac{c\,x_C + a\,x_A}{c + a}, & y_{D_B} = \dfrac{c\,y_C + a\,y_A}{c + a}; \\ x_{D_C} = \dfrac{a\,x_A + b\,x_B}{a + b}, & y_{D_C} = \dfrac{a\,y_A + b\,y_B}{a + b}. \end{cases}$$

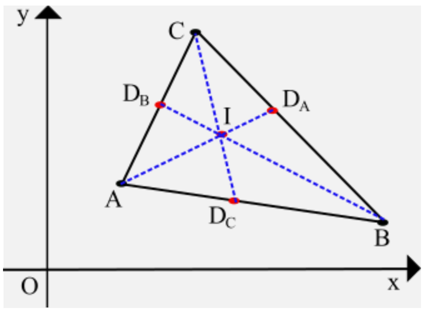

figura 2

Dimostriamo il primo gruppo delle relazioni (2). Per questo consideriamo la bisettrice AD_A. In virtù di un noto teorema di geometria piana, il punto D_A divide il lato BC in parti, BD_A e D_AC, direttamente proporzionali ai lati AB e AC, vale a dire:

$$\frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_A C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{\overline{BD_A}}{\overline{BD_A} + \overline{D_A C}} = \frac{c}{c + b} \quad \text{e quindi:} \quad \frac{\overline{BD_A}}{\overline{BC}} = \frac{c}{b + c}\,.$$

Si ha pertanto la seguente relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{BD_A} = \frac{c}{b + c}\overrightarrow{BC}\,.$$

Passando alle componenti cartesiane dei vettori, segue:

$$x_{D_A} - x_B = \frac{c}{b + c}\,(x_C - x_B)\,,\;\; y_{D_A} - y_B = \frac{c}{b + c}\,(y_C - y_B)\,.$$

E da qui, dopo alcuni semplici passaggi, segue il primo gruppo delle relazioni (2).

Per il secondo e terzo gruppo delle (2) si potrebbe procedere come per il primo gruppo oppure operare, in contemporanea, le seguenti permutazioni cicliche sul primo gruppo:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A, \quad a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a\,.$$

- Le (2) sono utili per trovare le formule che forniscono le coordinate dell'**incentro** I, ma i calcoli da fare per raggiungere l'obiettivo mettono a dura prova poiché sono estremamente lunghi e noiosi.

Si tratta di trovare anzitutto le equazioni di due bisettrici del triangolo, per esempio AD_A e BD_B:

$$AD_A \equiv \frac{y - y_A}{y_{D_A} - y_A} = \frac{x - x_A}{x_{D_A} - x_A}\,, \quad BD_B \equiv \frac{y - y_B}{y_{D_B} - y_B} = \frac{x - x_B}{x_{D_B} - x_B}\;;$$

e, tenendo presenti quelle delle formule (2) che servono allo scopo, risolvere il sistema delle equazioni delle due rette: compito ingrato perché, lo ribadisco, comporta lungaggini che farebbero spazientire persino Giobbe.

Comunque sia, chi avesse voglia di provarci troverà, alla fine, le seguenti formule per il calcolo delle coordinate dell'incentro I:

(3) $$x_I = \frac{a\,x_A + b\,x_B + c\,x_C}{2\,p}\,, \quad y_I = \frac{a\,y_A + b\,y_B + c\,y_C}{2\,p}\,,$$

dove p è il semiperimetro del triangolo.

3. Con un ragionamento analogo a quello su esposto per trovare le formule (2) si possono ricavare formule idonee al calcolo delle coordinate cartesiane dei punti in cui le simmediane del triangolo intersecano i lati opposti ai vertici dai quali escono le simmediane medesime.

Basta ricordare una proprietà della simmediana, già enunciata e dimostrata in un precedente articolo pubblicato su questa stessa rubrica (Cfr.: *Proprietà di figure geometriche*). Questa è la proprietà:

In ogni triangolo, la simmediana uscente da ciascun vertice divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai quadrati dei lati consecutivi.

Ovvero, considerato il triangolo ABC e preso, per esempio, il punto S_A in cui la simmediana uscente da A taglia il lato opposto BC:

$$\frac{\overline{BS_A}}{\overline{S_A C}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}\,.$$

Ora, volendo sprecare tempo, si può continuare con lo stesso ragionamento seguito sopra per le formule (2), ma non ci vuol molto a capire che le formule cercate si ottengono proprio dalle (2) sostituendo, *sic et simpliciter*, a^2, b^2, c^2 al posto di a, b, c rispettivamente. Cosicché le formule cercate sono le seguenti:

(4) $$\begin{cases} x_{S_A} = \dfrac{b^2\,x_B + c^2\,x_C}{b^2 + c^2}\,, & y_{S_A} = \dfrac{b^2\,y_B + c^2\,y_C}{b^2 + c^2}\;; \\ x_{S_B} = \dfrac{c^2\,x_C + a^2\,x_A}{c^2 + a^2}\,, & y_{S_B} = \dfrac{c^2\,y_C + a^2\,y_A}{c^2 + a^2}\;; \\ x_{S_C} = \dfrac{a^2\,x_A + b^2\,x_B}{a^2 + b^2}\,, & y_{S_C} = \dfrac{a^2\,y_A + b^2\,y_B}{a^2 + b^2}\,. \end{cases}$$

4. Il **punto di Nagel**, cioè il punto N in cui convergono le tre ceviane AT_A, BT_B, CT_C, dove T_A, T_B, T_C sono i punti in cui i lati del triangolo toccano i cerchi ex-inscritti ad esso, ha coordinate cartesiane, le cui formule si trovano utilizzando il fatto che l'incentro I è punto complementare di N, vale a dire che $\overrightarrow{NG} = 2\,\overrightarrow{GI}$. Sicché:

$$x_G - x_N = 2\,(x_I - x_G)\,,\quad y_G - y_N = 2\,(y_I - y_G)\,.$$

Da qui segue:

$$x_N = 3\,x_G - 2\,x_I\,,\quad y_N = 3\,y_G - 2\,y_I\,.$$

E infine, tenendo presenti le (1) e le (3), dopo idonee sostituzioni e semplici calcoli, si trovano le formule che esprimono le coordinate di N:

$$(5)\qquad x_N = \frac{p-a}{p}\cdot x_A + \frac{p-b}{p}\cdot x_B + \frac{p-c}{p}\cdot x_C\,,\qquad y_N = \frac{p-a}{p}\cdot y_A + \frac{p-b}{p}\cdot y_B + \frac{p-c}{p}\cdot y_C\,.$$

5. Il **punto di Spieker**, cioè l'incentro Z del triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo, ha esso pure coordinate cartesiane le cui formule si trovano utilizzando il fatto che Z è punto complementare dell'incentro I, vale a dire che $\overrightarrow{IG} = 2\,\overrightarrow{GZ}$. Per cui si ha:

$$x_G - x_I = 2\,(x_Z - x_G)\,,\quad y_G - y_I = 2\,(y_Z - y_G)\,.$$

Da qui segue:

$$x_Z = \frac{3\,x_G - x_I}{2}\,,\quad y_Z = \frac{3\,y_G - y_I}{2}\,.$$

E pertanto, tenendo presenti le (1) e le (3), dopo idonee sostituzioni e semplici calcoli, si trovano le formule che esprimono le coordinate di Z:

$$(6)\qquad x_Z = \frac{2\,p-a}{4\,p}\cdot x_A + \frac{2\,p-b}{4\,p}\cdot x_B + \frac{2\,p-c}{4\,p}\cdot x_C\,,\qquad y_Z = \frac{2\,p-a}{4\,p}\cdot y_A + \frac{2\,p-b}{4\,p}\cdot y_B + \frac{2\,p-c}{4\,p}\cdot y_C\,.$$

NOTA BENE. Queste formule si possono ricavare ugualmente ricordando che il punto Z è punto medio del segmento NI. Provare per credere.

6. Propongo adesso un esercizio riepilogativo su un triangolo particolare, per mostrare come concretamente si possa procedere per calcolare le coordinate di alcuni punti notevoli del triangolo. Triangolo che è stato scelto accuratamente in modo da non avere eccessive complicazioni nell'esecuzione dei calcoli da eseguire.

Precisamente, una volta riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il triangolo scelto ABC ha le seguenti coordinate (figura 3): A $(0, 21)$, B $(0, 0)$, C $(8, 15)$. Cosicché i suoi lati hanno le seguenti lunghezze: $\overline{BC}=a=17$, $\overline{CA}=b=10$, $\overline{AB}=c=21$, e il perimetro è: $2p=48$.

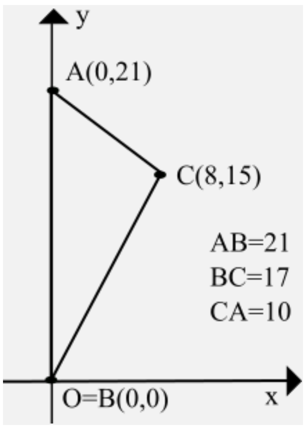

figura 3

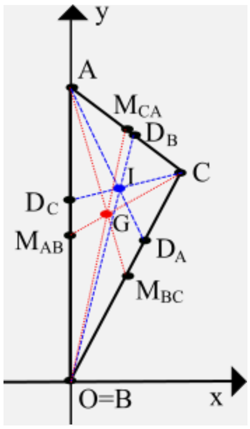

figura 4

- Si trovano le coordinate dei punti medi M_{BC}, M_{CA}, M_{AB} dei lati rispettivamente BC, CA, AB (figura 4):

$$x_{M_{BC}} = \frac{x_B + x_C}{2} = 4\,,\quad y_{M_{BC}} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{15}{2}\,;$$

$$x_{M_{CA}} = \frac{x_C + x_A}{2} = 4\,,\quad y_{M_{CA}} = \frac{y_C + y_A}{2} = 18\,;$$

$$x_{M_{AB}} = \frac{x_A + x_B}{2} = 0\,,\quad y_{M_{AB}} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{21}{2}\,.$$

quelle dei punti D_A, D_B, D_C in cui le bisettrici degli angoli interni tagliano quei lati (figura 4):

$$x_{D_A}=\frac{b\,x_B+c\,x_C}{b+c}=\frac{168}{31}\,,\quad y_{D_A}=\frac{b\,y_B+c\,y_C}{b+c}=\frac{315}{31}\;;$$
$$x_{D_B}=\frac{c\,x_C+a\,x_A}{c+a}=\frac{84}{19}\,,\quad y_{D_B}=\frac{c\,y_C+a\,y_A}{c+a}=\frac{336}{19};$$
$$x_{D_C}=\frac{a\,x_A+b\,x_B}{a+b}=0\,,\quad y_{D_C}=\frac{a\,y_A+b\,y_B}{a+b}=\frac{119}{9}\,,$$

e quindi si trovano le coordinate del baricentro G e dell'incentro I (figura 4):

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{8}{3}\,,\qquad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=12\;;$$
$$x_I=\frac{a\,x_A+b\,x_B+c\,x_C}{2\,p}=\frac{7}{2}\,,\qquad y_I=\frac{a\,y_A+b\,y_B+c\,y_C}{2\,p}=14\,.$$

A titolo di semplice curiosità, le coordinate di I possono essere trovate anche intersecando le bisettrici di due angoli interni del triangolo e verificare che effettivamente si ottiene lo stesso risultato.

- Le formule (4) forniscono le coordinate dei punti in cui le simmediane del triangolo incontrano i lati opposti ai vertici da cui esse escono. Dopodiché si possono trovare le equazioni di due simmediane e, risolvendo il sistema di queste equazioni, trovare le coordinate del simmediano S del triangolo.

Tralascio i calcoli che vanno eseguiti, che per la verità sono piuttosto noiosi. Mi basta dare l'idea di come si possa procedere.

Ad ogni modo, fornisco le coordinate dei punti in cui le simmediane incontrano i lati del triangolo (figura 5):

$S_A\left(\frac{3.528}{541},\frac{6.615}{541}\right)$, $S_B\left(\frac{1.764}{365},\frac{6.342}{365}\right)$, $S_C\left(0,\frac{6.069}{389}\right)$,

le equazioni delle simmediane BS_B e CS_C:

$$BS_B\equiv y=\frac{3.171}{882}\,x\,,\quad CS_C\equiv y=-\frac{117}{1.556}\,x+\frac{6.069}{389}$$

e, infine, le coordinate del loro punto comune, vale a dire del punto simmediano S:

$$x_S=\frac{1.764}{415}\approx 4{,}25\qquad y_S=\frac{6.342}{415}\approx 15{,}28\,.$$

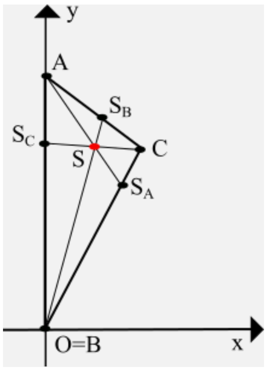

figura 5

- Le coordinate del punto N di Nagel e del punto Z di Spieker si potrebbero trovare utilizzando rispettivamente le formule (5) e (6), ma, in questa circostanza, per il punto N è preferibile ricorrere direttamente alla proprietà in base alla quale l'incentro I è punto complementare di N, mentre per il punto Z di Spieker conviene ricordare che è punto medio del segmento NI.

Cosicché, dalla reazione $\overrightarrow{NG}=2\,\overrightarrow{GI}$, segue:

$$x_G-x_N=2\,(x_I-x_G)\,,\quad y_G-y_N=2\,(y_I-y_G)\;;$$

per cui si ha:

$$x_N=3\,x_G-2\,x_I=3\cdot\frac{8}{3}-2\cdot\frac{7}{2}=1\,,\qquad y_N=3\,y_G-2\,y_I=3\cdot 12-2\cdot 14=8\,.$$

Mentre, per il punto di Spieker, si ha

$$x_Z=\frac{x_N+x_I}{2}=\frac{1+\frac{7}{2}}{2}=\frac{9}{4}\,,\qquad y_Z=\frac{y_N+y_I}{2}=\frac{8+14}{2}=11\,.$$

- Per le coordinate del circocentro K del triangolo ABC, di fatto non abbiamo formule idonee. In realtà, si potrebbero pure trovare delle formule, peraltro con fatica, ma non sarebbero spendibili sul piano pratico e per questo sono inutilizzabili. Dobbiamo ricorrere perciò ad un procedimento apposito, come quello di intersecare due assi del triangolo, come per esempio gli assi a_{AB} e a_{BC} dei lati rispettivamente AB e BC.

Ora, l'equazione dell'asse a_{AB} è immediata essendo:

$$a_{AB} \equiv y = y_{M_{AB}} \quad \text{ossia:} \quad a_{AB} \equiv y = \frac{21}{2}.$$

Occorre trovare l'equazione dell'asse a_{BC}. Per questo è necessario conoscere, oltre alle coordinate del punto medio M_{BC} del lato BC, che in realtà sono già state calcolate, anche la pendenza $m_{a_{BC}}$ dell'asse. Essa è l'anti-reciproco della pendenza m_{BC} della retta BC, per cui si ha:

$$m_{a_{BC}} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} = -\frac{8-0}{15-0} = -\frac{8}{15}.$$

Pertanto:

$$a_{BC} \equiv y - y_{M_{BC}} = m_{a_{BC}}(x - x_{M_{BC}}) \quad \text{ossia} \quad a_{BC} \equiv y - \frac{15}{2} = -\frac{8}{15}(x-4).$$

Le coordinate di K, cioè del punto intersezione delle rette a_{AB} e a_{BC}, sono date dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{21}{2} \\ y - \frac{15}{2} = -\frac{8}{15}(x-4) \end{cases}$$

A conti fatti, si trova:

$$K\left(-\frac{13}{8}, \frac{21}{2}\right).$$

- La conoscenza delle coordinate del circocentro K ci permette di trovare quelle dell'ortocentro H e del centro W del cerchio di Feuerbach. Questo perché K è punto complementare di H e W è punto medio del segmento HK.

Cosicché, dalla reazione $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GK}$, segue:

$$x_G - x_H = 2\,(x_K - x_G), \quad y_G - y_H = 2\,(y_K - y_G);$$

per cui si ha:

$$x_H = 3\,x_G - 2\,x_K = 3 \cdot \frac{8}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{13}{8}\right) = \frac{45}{4}, \qquad y_H = 3\,y_G - 2\,y_K = 3 \cdot 12 - 2 \cdot \frac{21}{2} = 15.$$

Mentre, per quanto concerne W, si ha:

$$x_W = \frac{x_H + x_K}{2} = \frac{\frac{45}{4} + \left(-\frac{13}{8}\right)}{2} = \frac{77}{16}, \qquad y_W = \frac{y_H + y_K}{2} = \frac{15 + \frac{21}{2}}{2} = \frac{51}{4}.$$

La sottostante figura (figura 6) mette in evidenza i punti G, I, N, Z, H, K, W e mostra nel medesimo tempo che i punti N, Z, G, I sono allineati, come pure sono allineati i punti K, G, W, H. La qual cosa accade sempre.

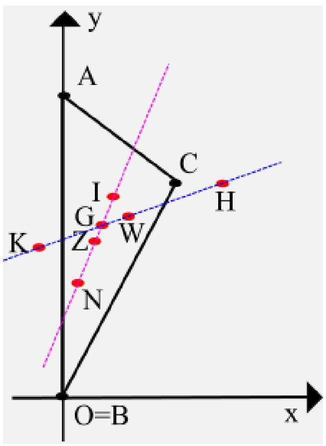

figura 6

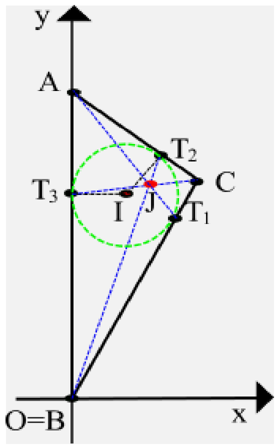

figura 7

- Per quanto riguarda il punto di Gergonne, dobbiamo ricorrere ad un procedimento diretto, come abbiamo fatto per il circocentro. Ricordiamo intanto che esso è il punto J in cui convergono le ceviane AT_1, BT_2, CT_3 del triangolo ABC, essendo T_1,T_2,T_3 i punti in cui il cerchio inscritto nel triangolo tocca i lati BC, CA, AB rispettivamente (figura 7). Per determinarne le coordinate basta però intersecare due di tali ceviane e, nel caso specifico, BT_2 e CT_3. Prima, però, bisogna trovarne le equazioni. Per questo occorre conoscere le coordinate dei punti T_2 e T_3, che poi altro non sono che i piedi delle perpendicolari condotte dall'incentro I ai lati CA e AB rispettivamente.

Ora, le coordinate di T_3 sono praticamente note, essendo: $x_{T_3}=x_A=0,\ y_{T_3}=y_I=14$.

Cosicché, l'equazione della ceviana CT_3 è la seguente:

$$\frac{y-y_C}{y_{T_3}-y_C}=\frac{x-x_C}{x_{T_3}-x_C}\ ,\quad \text{ossia:}\quad \frac{y-15}{14-15}=\frac{x-8}{0-8}\quad \text{e dunque:}\ y=\frac{1}{8}x+14\,.$$

Troviamo le coordinate di T_2. Per questo occorrono le equazioni della retta CA e della perpendicolare p_{CA} ad essa condotta per I. Le equazioni cercate sono le seguenti:

$$CA\equiv y=-\frac{3}{4}x+21,\quad p_{CA}\equiv y-14=\frac{4}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right).$$

Una volta risolto il sistema di queste due equazioni, si ottengono le coordinate di T_2:

$$T_2\ \left(\frac{28}{5},\frac{84}{5}\right).$$

Possiamo adesso trovare l'equazione della ceviana BT_2:

$$\frac{y-y_B}{y_{T_2}-y_B}=\frac{x-x_B}{x_{T_2}-x_B}\ ,\quad \text{ossia:}\quad \frac{y-0}{\frac{84}{5}-0}=\frac{x-0}{\frac{28}{5}-0}\quad \text{e dunque:}\ y=3\,x\,.$$

Finalmente, una volta risolto il sistema delle equazioni delle due ceviane, vale a dire il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{8}x+14 \\ y=3\,x \end{cases}$$

si trovano le coordinate del punto J di Gergonne:

$$J\ \left(\frac{112}{23},\frac{336}{23}\right).$$

- Dopo che sono state trovate le coordinate del punto J di Gergonne, si ottengono facilmente quelle del MittenPunkt M, dal momento che M è punto complementare di J, per cui $\overrightarrow{JG}=2\,\overrightarrow{GM}$. Si ha infatti:

$$x_G-x_J=2\,(x_M-x_G)\,,\quad y_G-y_J=2\,(y_M-y_G)\,;$$

da cui segue:

$$x_M=\frac{3\,x_G-x_J}{2}=\frac{3\cdot\frac{8}{3}-\frac{112}{23}}{2}=\frac{36}{23}\,,\qquad y_M=\frac{3\,y_G-y_J}{2}=\frac{3\cdot 12-\frac{336}{23}}{2}=\frac{246}{23}\,.$$

Si ricorda, per dovere di cronaca, che il MittenPunkt di un triangolo ABC è il punto simmediano del triangolo avente per vertici i centri dei tre cerchi ex-inscritti al triangolo ABC.

- Riguardo altri punti notevoli del triangolo, se non si dispone di formule idonee, bisogna procedere caso per caso, come è stato fatto per il circocentro e il punto di Gergonne. Naturalmente possono essere utilizzati, se fanno comodo, i risultati già ottenuti.