

### *Analisi funzionale e sue applicazioni.*

Lo sviluppo dell'analisi funzionale e delle sue applicazioni è stato un campo fruttuoso in Ucraina, soprattutto dopo il 1950, quando la rinomata scuola di Odessa è stata affiancata da folti gruppi di studiosi di analisi funzionale a Kyiv (Nikolai Bogoliubov, Ostap Parasiuk, Yurii Berezansky, Yu. Daletsky, M. Horbachuk , e H. Kats), Kharkiv (Naum Akhiezer, Volodymyr Marchenko, Yosyp Ostrovsky, I. Glazmann, M. Kadets, Leonid Pastur e D. Milman), Donetsk (Ihor Skrypnyk, Ivan Danyliuk), Lviv (V. Lantse, A. Plishko) e Chernivtsi (M. Popov).

I primi risultati importanti in Ucraina furono ottenuti nel 1935-1937 da Nikolai Bogoliubov e Mykola Krylov, che dimostrarono l'esistenza di una misura invariante nei sistemi dinamici, semplicemente ipotizzata fino ad allora. Questa dimostrazione era essenziale per lo sviluppo di una teoria generale. Durante la prima fase di sviluppo (1935–50) Marko Kerin ottenne risultati fondamentali e, in alcuni casi, pionieristici in aree come i coni negli spazi di Banach, problemi sugli autovalori per operatori lineari positivi e la topologia e la geometria negli spazi di Banach. Alcuni di questi risultati si trovano ora in libri standard sull'analisi funzionale come teoremi di Krein, Krein-Rutman, Krein-Shmulian, Krein-Milman, Krein-Krasnoselsky e così via. Lo sviluppo dell'analisi funzionale in Ucraina è stato potenziato dopo l'annessione dell'Ucraina occidentale, quando uno dei fondatori del suo studio, **Stefan Banach** di Leopoli, si è unito alla comunità matematica ucraina. Negli anni '50 importanti proprietà topologiche e geometriche degli spazi di Banach sono state ricavate da M. Kadets, D. Milman e B. Levin e una serie di

risultati sull'estensione degli operatori (diversi da quelli di Krein) sono stati ottenuti da I. Glazmann di Kharkiv e V. Lantse di Leopoli. Il primo passo essenziale verso lo studio della teoria spettrale fu compiuto alla fine degli anni Quaranta da Krein, che in seguito applicò i suoi risultati e la teoria di interi operatori al problema di Sturm-Liouville in semiasse. Nel 1956-65 Yurii Berezansky ha sviluppato un nuovo metodo astratto nella teoria dell'espansione negli spazi di Hilbert e lo ha usato per estendere i risultati di Krein a operatori differenziali parziali di un certo tipo in spazi di Hilbert funzionali. Ha anche mostrato che un operatore astratto autoaggiunto nello spazio di Hilbert ammette un'espansione in termini di autovettori generalizzati.

Alcuni risultati di quest'ultimo tipo sono stati ottenuti anche da H. Kats. Alla fine degli anni '70 e all'inizio degli anni '80 Berezansky ha ulteriormente esteso i suoi risultati. Lo studio delle equazioni differenziali che possono essere scritte solo in forme bilineari è stato intrapreso da M. Horbachuk e dai suoi studenti a Kyiv. Negli anni '70 e '80 V. Koshmanenko di Kyiv ha sviluppato una teoria generale degli operatori dissipativi. Durante questo periodo Berezansky, insieme ai suoi studenti H. Uson, Yu. Kondriatev e Yu. Samoilenko, ha sviluppato una teoria spettrale degli operatori ellittici con un numero infinito di variabili e l'ha applicata ad alcuni operatori della teoria quantistica dei campi. Ulteriori risultati in questa direzione sono stati ottenuti da L. Nizhnyk per gli operatori non ellittici.

I primi risultati di base sul comportamento asintotico della misura spettrale e della funzione spettrale per l'equazione di *Sturm-Liouville* furono ottenuti all'inizio degli anni '50 da Volodymyr Marchenko, che in seguito ottenne risultati simili per

l'equazione di Schrödinger. Il cosiddetto problema inverso per Sturm-Liouville è stato risolto indipendentemente con metodi diversi negli anni '50 da Marchenko, Marko Krein e da I. Gelfand e B. Levitan a Mosca. Insieme a Yosyp Ostrovsky, Marchenko ha anche risolto il problema degli autovalori per l'equazione di Hill con condizioni al contorno periodiche e ha riassunto i risultati nella sua monografia *Sturm-Liouville Operators and Applications* (1986). Yuri Berezansky è stato il primo a studiare il problema inverso per le equazioni che coinvolgono derivate parziali o differenze parziali. Negli anni '60 L. Nizhnyk iniziò uno studio dettagliato dei problemi diretti e inversi nella dissipazione non stazionaria e, in particolare, del sistema delle equazioni di Dirac. Nel 1947–8 M. Krein iniziò lo studio delle equazioni nello spazio di Banach che coinvolgono coefficienti operatori limitati con accento sulla stabilità. Questo lavoro è stato continuato da Yu. Daletsky, S. Krein e altri. Nel 1949 Nikolai Bogoliubov e B. Khatset hanno mostrato che alcuni problemi di equilibrio nella meccanica statistica portano alla risolubilità di un'equazione in uno spazio di distribuzioni di Banach. Il caso delle equazioni differenziali i cui coefficienti sono operatori illimitati nello spazio di Hilbert è stato studiato da M. Horbachuk e altri. Lo studio delle proprietà spettrali, della completezza di autovettori generalizzati e di altre proprietà di operatori non autoaggiunti e funzioni operatore è stato intrapreso dagli anni '50 agli anni '80 da Yu. Berezansky, M. Horbachuk, M. Krein, V. Marchenko, V. Lantse e altri. Negli anni '50 e '70 M. Krein ha sviluppato la teoria degli operatori lineari in spazi con metrica indefinita. A. Kuzhel di Kyiv si è occupato dell'analisi spettrale e delle estensioni di varie classi di operatori lineari negli anni '60 e '80.

Yurii Berezansky e H. Kats hanno introdotto e studiato la forma astratta degli spazi di Sobolev con norme positive e negative. L'applicazione di questi spazi ha rivelato una serie di fatti interessanti sulle equazioni alle derivate parziali e ha fornito un quadro per altri lavori. Berezansky, V. Didenko, Ya. Roitberg e altri hanno studiato il problema del valore al contorno di Dirichlet per le equazioni ellittiche, l'uniformità delle soluzioni e le proprietà delle funzioni di Green. Ostap Parasiuk ha utilizzato le funzioni generalizzate per studiare la risolubilità delle equazioni integrali. Insieme a Nikolai Bogoliubov ha dimostrato un teorema fondamentale sulla possibilità di regolarizzazione di una matrice di dissipazione per qualsiasi ordine della teoria perturbativa. Questi risultati sono stati successivamente applicati alla costruzione di una teoria delle interazioni elettromagnetiche e deboli. Dopo il 1970 Ihor Skrypnyk ha dato un contributo fondamentale allo sviluppo dell'analisi funzionale non lineare, in cui ha introdotto una nuova classe di operatori non lineari di tipo  $(\infty)$  che agiscono da uno spazio di Banach al suo duale, ha sviluppato per esso una dettagliata teoria del grado topologico e l'ha applicata per ottenere nuovi teoremi di esistenza per una classe generale di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari astratte e concrete in meccanica, elasticità, fisica matematica e altri campi. I metodi diretti di analisi spettrale qualitativa sono stati applicati da I. Glazmann negli anni '60 a operatori differenziali singolari.