

La prova di Matematica degli Esami di Stato, analisi dei quesiti e dei problemi proposti e relative riflessioni

Erasmus Modica - Nella giornata di ieri i candidati degli Esami di Stato 2013 si sono confrontati con la tanto temuta prova di **Matematica** per i Licei Scientifici. Come sempre il web si riempie di commenti vari di specialisti e non, ma a volte non ci si sofferma ad analizzare la prova fino a vederne la vera struttura e la natura dei quesiti. I commenti vanno dall'espressione "tracce abordabili" all'espressione "tracce difficili", ma raramente si comprende in cosa consiste l'abordabilità e la difficoltà della prova stessa.

Volendo dare una riduttiva e sommaria valutazione generale della prova, si può benissimo utilizzare l'aggettivo **fattibile**, inteso come "alla portata dei candidati". Ovviamente, quando si dice "fattibile", si intende dire che i candidati sono stati messi nelle condizioni di poter scegliere dei quesiti più consoni alle loro competenze, in quanto molti di essi sono vicinissimi a quanto affrontato nel percorso d'istruzione secondaria di secondo grado. Di certo si tratta di una prova "*puramente matematica*", con pochissimi riferimenti a elementi tratti dalla vita quotidiana. Ma del resto, la prova è tarata per studenti del vecchio ordinamento, per i quali, secondo i vecchi programmi ministeriali in vigore, non erano previste modellizzazioni e similari. Attenderemo la prova del 2015 per vedere come in Ministero riformulerà la prova di Matematica, non trascurando gli elementi di novità portati dalla Riforma dei Licei e dedicando particolare attenzione alla tanto decantata modellistica matematica.

Passiamo adesso ad analizzare, punto per punto, tutti i contenuti della prova, cercando di comprendere quanto siano vicini alle conoscenze e competenze dei candidati. Risulta superfluo dire che queste considerazioni prendono a modello la situazione dello studente che ha avuto un percorso di studi regolare; nel caso delle singole situazioni di classi che hanno cambiato un docente di matematica per ogni anno scolastico, le considerazioni non possono di certo essere le stesse.

Il **primo problema** è un classico problema di analisi matematica. L'elemento di novità sta nella presentazione della funzione che viene data sotto forma di funzione integrale, argomento affrontato alla fine dell'anno scolastico e quindi, a volte, poco chiaro ai discenti. Inoltre, non tutti i docenti dedicano il giusto quantitativo in termini di tempo allo studio della funzione integrale, per tale ragione gli studenti si possono sentire spiazzati di fronte al simbolo, pur non essendo complessa, nella sua natura, la trattazione.

La rappresentazione della funzione derivata prima poteva essere effettuata con le sole conoscenze relative alle trasformazioni geometriche nel piano, individuando una dilatazione della funzione coseno lungo l'asse delle ascisse e una traslazione lungo l'asse delle ordinate. Purtroppo, oggi, molti studenti non sono in grado di ragionare in termini di trasformazioni geometriche del piano, per tale ragione preferiscono effettuare il classico studio dell'andamento di una funzione, in quanto lo prediligono per la sua natura meccanica. Con lo studio classico, ricavare le informazioni richieste diventa molto semplice, in quanto sono abituati alle procedure.

La determinazione del valor medio di una funzione rientra all'interno dei programmi di studio del quinto anno e tale tipologia di esercizio viene presentata di certo durante le attività didattiche in aula. L'integrale si presenta molto semplice, quindi i calcoli sono abbastanza veloci. Magari qualche candidato lo avrà confuso con il classico teorema di Lagrange e avrà calcolato chissà quale altro elemento non richiesto nel tema!

Anche l'integrale per la determinazione del volume richiesto risulta abbastanza semplice, rientrando

nei casi affrontati durante l'anno scolastico. Un possibile errore dei candidati può essere stato quello di voler utilizzare a tutti i costi la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, non comprendendo che in questo caso la determinazione del volume è molto più semplice.

Il **secondo problema** avrà rincuorato i candidati, in quanto la funzione viene fornita nella sua presentazione algebrica classica, anche se non molti vi hanno riconosciuto la rappresentazione cartesiana della nota versiera di Agnesi. Infatti, dati:

- la circonferenza di centro $(0; 2)$,
 - la retta t , parallela all'asse delle ascisse, di equazione $y=2$ tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(0; 2)$,
 - il fascio proprio di rette passanti per l'origine degli assi cartesiani,
- la versiera di Agnesi è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno come ascissa quella del punto d'intersezione di una generica retta del fascio con la tangente t e come ordinata il punto d'intersezione della stessa retta del fascio con la circonferenza.

La versiera è stata già data in mano ai ragazzi del PNI nel 2003, con un problema dedicato all'aspetto geometrico e che si concretizzava nello studio della funzione $f(x) = \frac{a^3}{a^2+x^2}$.

Tornando al problema in sé, lo studio della funzione si presentava alla portata dei candidati, in quanto una delle più semplici tipologie di funzione da studiare. Essa non presentava nessuna difficoltà in termini di calcoli, semplice la determinazione dell'unico asintoto e lo studio delle derivate prima e seconda.

La determinazione delle rette tangenti rientra all'interno degli esercizi standard di analisi, ma una "complicazione" sta nel dimostrare che il quadrilatero individuato dalle quattro rette è un rombo. Complicazione di fatto inesistente, in quanto si prova subito che le rette a cui appartengono i lati sono a due a due parallele e la lunghezza dei lati è la stessa. L'unica difficoltà, legata a una possibile dimenticanza della relativa formula studiata nel corso del IV anno, può essere stata la determinazione degli angoli interni del rombo.

Il punto 2 richiede la determinazione di una semplice circonferenza e la trattazione parametrica del quesito. Gli studenti, soprattutto durante il terzo anno, sono abituati a risolvere problemi di questo genere per cui non è affatto difficile rispondere alla richiesta che, tra l'altro, presenta dei calcoli molto semplici.

Anche l'area della regione R da determinare è priva di calcoli complessi, in quanto l'integrale da risolvere è semplice e rientra nei casi affrontati durante l'anno scolastico. Ma l'unica nota dolente è la determinazione dell'integrale improprio. Difficilmente, con tutti i contenuti da affrontare durante l'anno scolastico e con tutte le lotte contro il tempo che bisogna fare, si affrontano gli integrali generalizzati. Quindi, non bisogna affatto stupirsi se i candidati non sono stati in grado di rispondere a questa seconda parte della terza richiesta. Forse poteva proprio essere omessa.

L'ultimo punto del problema, invece, richiama il punto 4 del problema 1 assegnato nei corsi di Ordinamento nello scorso Esame di Stato del 2012. In particolare si richiede soltanto l'impostazione dell'integrale per la determinazione del volume del solido che si forma nella rotazione della regione attorno all'asse delle ordinate. Unica perplessità consiste nell'uso del metodo dei gusci cilindrici che, pur essendo semplice nella sua natura, spesso non viene presentato agli alunni, in quanto quest'ultima parte viene affrontata molto velocemente al termine dell'anno scolastico.

Passiamo adesso all'analisi dei quesiti presentati nel **Questionario**.

Il **quesito 1** è abbastanza semplice, in quanto simile a tutti gli esercizi effettuati durante il IV anno e riguardanti la trigonometria. Ancor più semplice la sua risoluzione quando si trova, utilizzando la relazione inversa dell'area del triangolo, che l'angolo formato dai due lati è retto:

$$\sin \alpha = \frac{2A}{l_1 l_2}$$

e quindi il lato cercato è proprio l'ipotenusa del triangolo rettangolo. Assolutamente inutile l'uso della formula di Erone!

Il **quesito 2** è di semplice risoluzione, in quanto rientra negli esercizi che si affrontano all'inizio dell'anno per la determinazione dei domini delle varie funzioni.

Il **quesito 3** rientra tra i classici problemi di massimo e di minimo oggetto di studio nel V anno. Si poteva pervenire al risultato utilizzando la sola intuizione geometrica che porta a pensare che la retta cercata è quella perpendicolare al segmento AB. Ma, in modo rigoroso, bastava determinare il fascio di rette passanti per B e massimizzare la distanza di A da tali rette. Dopo alcuni calcoli forse un po' lunghi, motivo per cui il quesito è più sbilanciato rispetto ai precedenti, si perviene al risultato richiesto.

Il **quesito 4** richiede delle conoscenze di geometria solida, nota dolente per i candidati, in quanto spesso non viene trattata per motivi di tempo. La dimostrazione della formula è classica e richiede l'applicazione dei criteri di similitudine. Pur non essendo difficile, lo diventa a causa delle mancate conoscenze.

Il **quesito 5** si configura come un'applicazione della matematica alla vita quotidiana. In sostanza è un semplice problema di applicazione delle variazioni percentuali, spesso poco amate dagli studenti. Effettuando alcuni calcoli semplici si perviene alla soluzione. Proprio per la sua natura e a causa della lontananza dell'argomento rispetto al periodo di trattazione, può risultare poco semplice.

Il **quesito 6** è dedicato al calcolo combinatorio, argomento quasi sempre non affrontato all'interno del corso secondario di secondo grado. Per tale ragione i candidati lo avranno scartato a priori, considerandolo molto complesso.

Il **quesito 7** è analogo alla prima parte del quesito 2 posto ai docenti della classe di concorso A059 che hanno partecipato alla prova scritta del concorso a cattedra in corso. Si tratta di un semplice problema di similitudine, ma spesso i candidati non sono molto ferrati in materia, in quanto l'argomento viene trattato alla fine del secondo anno e, nella maggior parte dei casi, di corsa. Si potrebbe quindi definire semplice nella sostanza, ma non troppo nella pratica.

Anche nel **quesito 8** viene proposta una funzione integrale. Esso si presenta semplice nella sua formulazione, ma si ritiene che non lo sia poi tanto per gli alunni. Infatti, come già accennato, l'argomento viene trattato alla fine dell'anno scolastico e spesso di corsa.

Il **quesito 9** consiste in un classico calcolo di limite mediante l'uso dei limiti notevoli. Durante l'anno scolastico i candidati vengono "abituati" a trattare queste tipologie di limite, nulla esclude che lo stesso limite sia stato già calcolato dagli stessi durante le varie esercitazioni in classe.

Il **quesito 10** è molto interessante nella sua formulazione e la richiesta è accessibile a tutti gli studenti che siano stati abituati a ricavare le informazioni di una funzione dal suo grafico. È bene ricordare che il problema dell'inversione non è sempre scontato e, di conseguenza, gli studenti vanno guidati in tale operazione per far sì che possano essere in seguito autonomi.

Alla luce delle considerazioni fatte, il tema di quest'anno era un tema molto classico e vicino ai candidati. Si ritiene che essi hanno potuto di certo affrontare al meglio il problema 2 e i quesiti 1, 2, 3, 9, 10.

Per concludere quest'intervento ci si chiede: sapendo che nel 2015 si diplomeranno gli studenti del Nuovo Ordinamento e sapendo che le Indicazioni Ministeriali prevedono diversi elementi di novità, quanti sono i docenti che hanno sposato pienamente le nuove indicazioni e che quindi, alla luce di questo nuovo traguardo, stanno abituando i discenti a quanto in esse previsto? E che dire della didattica per competenze?