Poligoni con angoli retti
di Antonino Giambò

1. In questo articolo propongo un'analisi abbastanza approfondita circa il numero degli angoli retti di un poligono convesso e la loro disposizione, ma con una disamina particolare di alcuni poligoni equilateri.

Precisamente, dopo un breve esame riservato a triangoli e quadrilateri e dopo la dimostrazione di una proprietà che riguarda tutti i poligoni convessi di almeno 5 lati, mi occuperò in maniera particolareggiata di pentagoni ed esagoni.

L'argomento non è sconvolgente e di per sé non svolge alcun ruolo speciale. È semplicemente l'occasione per una riflessione, fine a se stessa se si vuole, su alcune caratteristiche dei poligoni, che, direi per ovvie ragioni, non trovano spazio a livello di insegnamento. È comunque un'occasione per verificare le conoscenze degli studenti in Geometria e la loro abilità in campo trigonometrico.

2. A proposito del triangolo osservo banalmente che esso può avere al più un angolo retto e non c'è nient'altro da dire al riguardo.

Circa il quadrilatero, si capisce subito che può presentare un solo angolo retto (es.: *aquilone* o *deltoide* – figura 1) o due angoli retti che possono essere consecutivi (es.: *trapezio rettangolo*) o anche opposti (figura 2), oppure presentare quattro angoli retti (*rettangolo*). Ma non esiste alcun quadrilatero con tre soli angoli retti; in questo caso, infatti, anche il quarto angolo sarebbe retto.

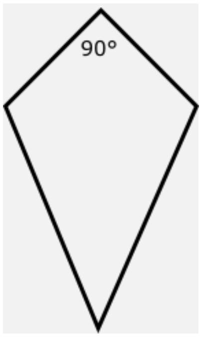

figura 1

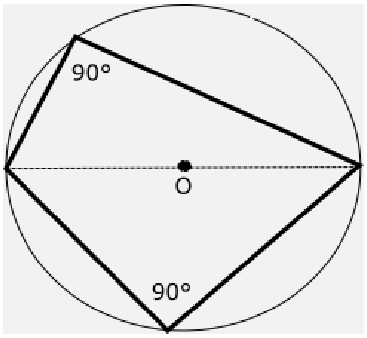

figura 2

Sgombrato così il campo da triangoli e quadrilateri, possiamo occuparci del seguente teorema, valevole per ogni poligono convesso di almeno 5 lati.

TEOREMA.
Ogni poligono convesso di almeno 5 lati presenta al più tre angoli retti.

DIMOSTRAZIONE.
Ricordo che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è $(n-2) \cdot 180°$.

Ora, se k di questi n angoli (con $k<n$) fossero retti, la loro somma sarebbe $k \cdot 90°$, mentre la somma dei rimanenti $n-k$ angoli sarebbe $(n-2)\cdot 180° - k\cdot 90°$. D'altro canto, ciascuno di questi $n-k$ angoli deve avere comunque un'ampiezza minore di 180°, per cui la loro somma deve essere minore di $(n-k)\cdot 180°$. Deve essere dunque soddisfatta la seguente condizione:

$$0 < (n-2) \cdot 180° - k \cdot 90° < (n-k) \cdot 180° .$$

Da qui segue:

$$(k < 2\,n - 4) \ \& \ (k < 4) .$$

Per cui, essendo $n \geq 5$, deve essere $k<4$. Come dire che il poligono può avere al più 3 angoli retti.
[c.v.d.]

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA. Di questo teorema si può fornire una dimostrazione alternativa, chiamando in causa la somma degli angoli esterni di un poligono. Somma che, com'è noto, è uguale a 360°.

Ora, tenendo presente che ogni angolo interno di un poligono è supplementare del suo corrispettivo angolo esterno (figura 3, dove, per ogni (●) e per ogni (×), risulta (●)+(×)=180°), qualora il poligono avesse k angoli interni retti, anche i corrispettivi angoli esterni sarebbero retti e la loro somma sarebbe $\mathrm{k} \cdot 90°$.

Dovrebbe essere soddisfatta, pertanto, la seguente condizione:

$$\mathrm{k} \cdot 90° < 360° \quad \text{ossia:} \quad \mathrm{k} < 4\,.$$

Esattamente come prima.

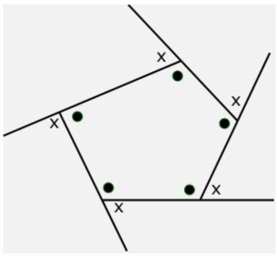

figura 3

Se non ci sono altre condizioni sul poligono, gli angoli retti che esso eventualmente presenta, in numero di uno-due-tre, possono trovarsi in qualunque posizione ed essere anche consecutivi, qualora fossero due o tre.

Le figure sottostanti (figura 4 – due angoli retti consecutivi; figura 5 – tre angoli retti consecutivi), ancorché limitate al pentagono, dovrebbero dare l'idea di ciò che sto dicendo.


figura 4

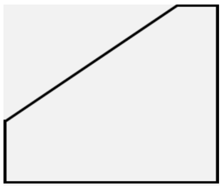
figura 5

Più interessante è la situazione in cui il poligono è soggetto a qualche condizione.

Ecco, voglio soffermarmi sul caso in cui si impone che il poligono sia equilatero. Ma lo faccio prendendo in esame solamente pentagoni ed esagoni.

3. Incominciamo ad analizzare il caso in cui **il poligono equilatero presenta un solo angolo retto**.

Si capisce subito che esistono pentagoni ed esagoni siffatti. Cosa che le due figure sottostanti (figure 6 e 7), portate come esempi, mettono bene in evidenza.

Ci si può chiedere, caso mai, se sia possibile calcolare le ampiezze degli altri angoli interni del poligono. La risposta, in linea teorica, è Sì. Ma sul piano pratico ci potrebbero essere delle difficoltà.

Descrivo un paio di situazioni relativamente facili da affrontare.

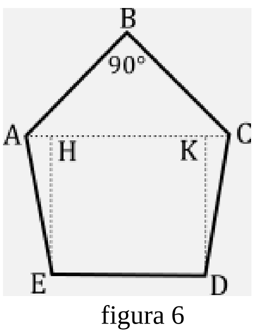

figura 6

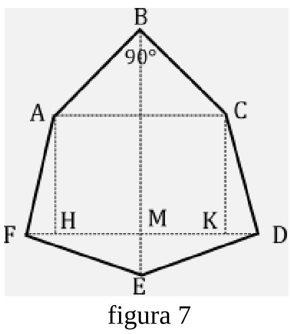

figura 7

- Nel caso del pentagono ABCDE (figura 6), in cui è retto l'angolo in B e la diagonale AC è parallela al lato ED, posto per comodità che sia a la lunghezza di ciascuno dei suoi lati e indicato con α l'angolo $\mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$, si trova facilmente che è:

$$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{KC}} = a \cos\alpha \ , \quad \text{pertanto:} \quad \overline{\mathrm{HK}} = \overline{\mathrm{AC}} - 2\,\overline{\mathrm{AH}} = a\sqrt{2} - 2\,a\cos\alpha\,.$$

E siccome $\mathrm{HK} = \mathrm{ED} = a$ allora si ottiene la seguente equazione goniometrica:

$$a\sqrt{2} - 2\,a\cos\alpha = a\,,\ \text{ da cui segue: }\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ \text{ e quindi: }\ \alpha \approx 78°3'\,.$$

Ne consegue che:

$$\mathrm{B\widehat{A}E} = \mathrm{B\widehat{C}D} \approx 78°3' + 45° = 123°3';\quad \mathrm{A\widehat{E}D} = \mathrm{C\widehat{D}E} \approx 180° - 123°3' = 56°57'\,.$$

- Nel caso dell'esagono ABCDEF (figura 7), in cui è retto l'angolo in B e le diagonali AC e FD sono perpendicolari alla diagonale BE, per cui la figura è simmetrica rispetto a quest'ultima diagonale, posto che sia a la lunghezza di ciascuno dei lati dell'esagono e indicato con α l'angolo $\mathrm{F\widehat{A}H}$, si trova:

$$\overline{\mathrm{FH}} = a\sin\alpha\ ,\ \text{ per cui: }\ \overline{\mathrm{FM}} = \overline{\mathrm{FH}} + \overline{\mathrm{HM}} = a\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Affinché sia possibile la configurazione descritta, deve essere ovviamente FM<FE, ossia:

$$\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} < 1\ \text{ vale a dire all'incirca: }\ \alpha < 17°\,.$$

Bisogna escludere, però, l'angolo α=15°, per una ragione che vedremo più avanti.
Ora, supponiamo che, oltre ai dati assegnati, si ponga α=10°.
Orbene, essendo $\sin 10° \approx 0{,}17365$, si ottiene:

$$\overline{\mathrm{FM}} = a\left(\sin 10° + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,,\ \text{ per cui: }\ \cos\mathrm{E\widehat{F}M} = \frac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{FE}}} = \sin 10° + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}88075\,.$$

E quindi: $\mathrm{E\widehat{F}M} \approx 28°16'$.
A questo punto è semplice calcolare le ampiezze dei 5 angoli non retti dell'esagono. Si trova precisamente:

$$\mathrm{B\widehat{A}F} = \mathrm{B\widehat{C}D} = 145°\,,\ \mathrm{A\widehat{F}E} = \mathrm{C\widehat{D}E} \approx 108°16',\ \mathrm{D\widehat{E}F} \approx 123°28'\,.$$

4. Ci occupiamo adesso del caso in cui **il poligono equilatero presenta due angoli retti**.
Analizziamo due situazioni, a seconda che i due angoli siano o non siano consecutivi.

- Le due figure sottostanti (figure 8 e 9) mostrano chiaramente che esistono pentagoni ed esagoni equilateri aventi due angoli retti non consecutivi.
Ora, riguardo al pentagono, quella riportata è, a meno di similitudini, l'unica raffigurazione possibile.

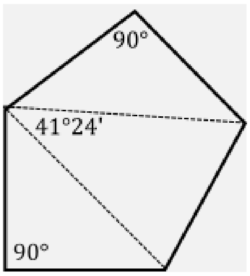

figura 8

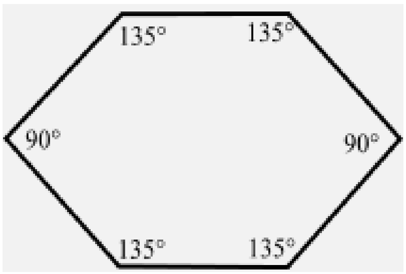

figura 9

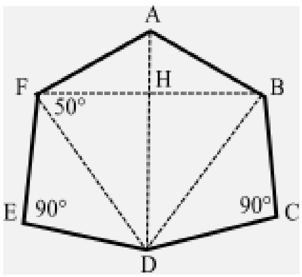

figura 10

Per l'esagono, invece, esistono, oltre a quella della figura 9, altre configurazioni con due soli angoli retti non consecutivi. La rappresentazione di figura 10 ne è un esempio. In essa l'esagono equilatero ABCDEF ha retti gli angoli in C e in E ed è simmetrico rispetto alla diagonale AD perpendicolare a BF.
Proprio su questa figura, nella quale si è posto uguale a 50° la misura dell'angolo $\mathrm{D\widehat{F}H}$, vogliamo fare qualche considerazione che spieghi come essa non sia la sola possibile
Poniamo per questo $\mathrm{D\widehat{F}H}=\alpha$ e $\mathrm{A\widehat{F}H}=\beta$. Risulta allora: $\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FD}}\cos\alpha$ e $\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FA}}\cos\beta$.
Siccome $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{FA}}\sqrt{2}$, deve essere: $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$.
Possiamo osservare adesso che l'angolo $\mathrm{E\widehat{F}A}$ deve essere minore di 180°, ragion per cui deve risultare:

$$\alpha + \beta + 45° < 180°\ \text{ ossia: }\ \alpha + \beta < 135°\ \text{ e quindi: }\ \beta < 135° - \alpha\,;$$

di conseguenza:

$$\cos\beta > \cos(135° - \alpha)\ \text{ e perciò: }\ \cos\beta > \cos 135°\cos\alpha + \sin 135°\sin\alpha\ ;$$

da qui, a conti fatti, segue:

$$\tan\alpha < 3\ \text{ e perciò all'incirca: }\ \alpha < 71°4'.$$

D'altro canto, anche l'angolo $E\hat{D}C$ deve essere minore di 180°, ragion per cui deve risultare:

$$2\cdot(45°+90°-\alpha)<180° \quad \text{ossia:} \quad \alpha>45°.$$

Insomma, la configurazione 10 è possibile per ogni angolo $D\hat{F}H$ compreso fra 45° e 71°4'.
Bisogna scartare però il valore $D\hat{F}H=60°$, per una ragione che sarà chiarita più avanti.

- Passando ai poligoni equilateri con due angoli retti consecutivi, possiamo dire che esiste un pentagono equilatero avente due angoli retti consecutivi (figura 11). E si comprende facilmente che, a meno di similitudini, la raffigurazione riportata è l'unica possibile.

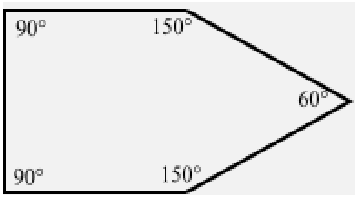

figura 11

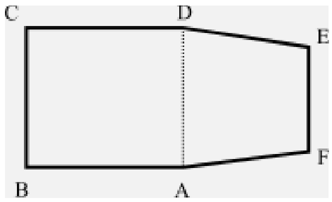

figura 12

Non esiste, invece, alcun esagono equilatero avente due angoli retti consecutivi. Per dimostrarlo supponiamo, ragionando per assurdo, che un tale esagono esista e sia l'esagono ABCDEF, in cui sono retti gli angoli in B e in C (figura 12). Ora, considerato che gli angoli $B\hat{A}F$ e $C\hat{D}E$ devono avere un'ampiezza minore di 180°, si desume che gli angoli $D\hat{A}F$ e $A\hat{D}E$ devono avere un'ampiezza minore di 90°. Questo implica che, essendo $DE=AF$, il lato EF è minore di DA, mentre, se l'esagono fosse equilatero, dovrebbe essere uguale a BC e quindi a DA.
Insomma nell'esagono in esame, possono essere uguali i lati AB, BC, CD e possono essere uguali i lati DE, EF, FA, ma questi non possono essere uguali a quelli. Oppure possono essere uguali i lati AB, BC, CD, DE, FA, ma il lato EF non può essere uguale ad essi. Per cui l'esagono non può essere equilatero.

5. Rimane da esaminare il caso in cui **il poligono equilatero presenta tre angoli retti**.

Intanto, si capisce subito che i tre angoli non possono essere consecutivi. Infatti, in tal caso, già quattro lati consecutivi, quelli che formano i tre angoli retti, chiuderebbero il poligono, formando un quadrato, e non ci sarebbe spazio per altri lati.

Bisogna vedere se esistono pentagoni e/o esagoni in cui i tre angoli retti non sono consecutivi.

Diciamo subito che **un pentagono siffatto non esiste**. Per dimostrarlo supponiamo, ragionando ancora una volta per assurdo, che invece esista e sia il pentagono ABCDE, in cui sono retti gli angoli in B, C ed E (figura 13).

Essendo AD l'ipotenusa del triangolo rettangolo EAD, risulta ovviamente $DE<AD$ e quindi $DE<CB$.

In questo pentagono, pertanto, possono essere uguali i lati AB, BC, CD e possono essere uguali i lati DE ed EA, ma questi non possono essere uguali a quelli.

Il pentagono, perciò, non può essere equilatero.

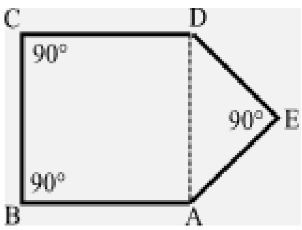

figura 13

Diverso è il discorso per l'esagono. Al riguardo, ritorniamo sull'esagono di figura 7 e supponiamo che l'angolo $F\hat{A}H$ abbia quell'ampiezza di 15° che prima abbiamo scartato. Ebbene, tenendo presente che:

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

e ragionando allo stesso modo di allora, si trova:

$$\cos E\hat{F}M = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \text{per cui:} \quad E\hat{F}M = 15°.$$

Ragion per cui le ampiezze degli angoli dell'esagono sono le seguenti:

$$A\hat{B}C = A\hat{F}E = E\hat{D}C = 90°, \quad B\hat{A}F = F\hat{E}D = D\hat{C}B = 150°.$$

Si ottiene lo stesso risultato se si ritorna sull'esagono di figura 10 e si suppone che l'angolo $D\hat{F}H$ abbia quell'ampiezza di 60° che prima abbiamo scartato.

D'altro canto, senza ricorrere a questi ragionamenti, si può osservare rapidamente che, costruendo sui tre lati di un triangolo equilatero assegnato, ed esternamente ad esso, tre triangoli rettangoli e isosceli, di cui i lati del triangolo dato sono le ipotenuse, si ottiene proprio un esagono equilatero i cui angoli hanno ampiezze alternate di 90° e 150° (figura 14).

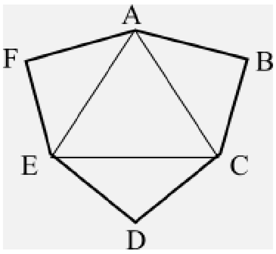

figura 14

Bisogna dire che è una peculiarità del triangolo equilatero questa proprietà appena descritta.

Non riguarda altri poligoni.

Non un quadrato, dal momento che una costruzione analoga genera un altro quadrato (figura 15).

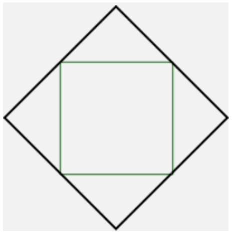
figura 15

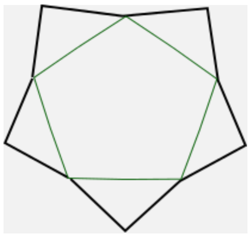
figura 16

Né un poligono regolare di almeno 5 lati, giacché con la costruzione descritta si ottiene, sì, un poligono equilatero con un numero doppio di lati, ma concavo (figura 16 – dove n=5).