

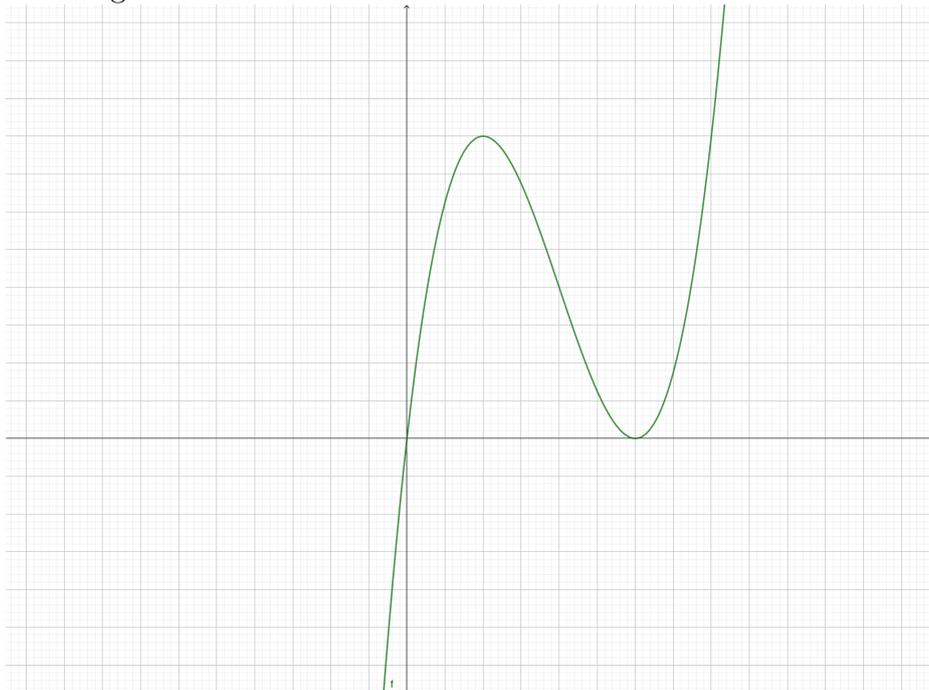
Liceo "Politi" di Agrigento

Esame di stato 2022

Liceo Scientifico
Liceo scientifico opzione scienze applicate
Seconda prova scritta
Matematica

1 Problema

Sia dato il grafico della funzione



1. Stabilisci, motivando opportunamente la scelta, quale delle seguenti funzioni può essere rappresentata dal grafico dato:

$$y = \frac{x^2 + a}{x^2 + 1}; \quad y = x(x + a)^2; \quad y = x^2 e^{-ax}; \quad (1)$$

con $a \neq 0$

2. Dopo aver verificato che la funzione adatta è $y = x(x+a)^2$, determinare il valore del parametro a in modo che la retta tangente alla curva nel punto di ascissa 1 sia parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.
3. Studia la funzione $f(x)$ trovata nel punto precedente e rappresentala più dettagliatamente.
4. Determina sulla curva il punto P , con ascissa $0 < x < 2$ in modo che sia massima la somma delle distanze di P dagli assi cartesiani
5. Dopo aver determinato l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1, determina l'area della regione di piano compresa tra la retta tangente e la curva.

2 Problema

1. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4$, determina un punto P su di essa, appartenente al quarto quadrante, in modo che sia minima la somma $P(x)$ dei quadrati delle distanze di P dai punti di intersezione della parabola con l'asse delle x .
 2. verifica che per la funzione $f(x) = \frac{P(x)}{2} - 20$ vale il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo compreso tra $[2; 3]$ ed, eventualmente, risolvi l'equazione $f(x) = 0$ in questo intervallo.
 3. Verifica che per $f(x)$ vale il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, \sqrt{7}]$ e calcola il punto $c \in [0, \sqrt{7}]$ per cui il teorema è verificato.
 4. Calcola le rette tangenti alla curva $f(x)$ nei punti in cui taglia l'asse delle x e mostra che si intersecano in un punto appartenente all'asse y .
 5. Calcola infine l'area compresa tra la funzione $f(x)$, l'asse x e le rette $x = -2$ e $x = 2$.
-

Quesiti

Quesito 1

Data la funzione $f(x) = e^x - \sin x - 3x$, si calcolino i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

Quesito 2

Data la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

determinare i parametri h e k in modo che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo $[0; 4]$

Quesito 3

Calcola il seguente limite senza utilizzare la regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(x+3)}{e^{x^2} - e^9}$$

Quesito 4

Un triangolo è inscritto in un semicerchio di raggio $R = 18dm$ in modo che due dei suoi vertici si trovino sulla semicirconferenza, il terzo vertice invece si troverà nel centro O del cerchio a cui appartiene la semicirconferenza. Qual è l'area massima del triangolo?

Quesito 5

La derivata seconda di $f(x)$ è uguale a 10 e si sa che $f'(1) = 3$. Calcolare $f(x)$ sapendo che passa per l'origine.

Quesito 6

Data la funzione $f(x) = \frac{x-2}{x^2+k}$ con $k \in \mathbb{R}$

1. determina per quali valori di k la funzione $f(x)$ è continua su tutto \mathbb{R}
2. determina per quali valori di k ammette dei punti di discontinuità determinandone il numero e il tipo.

Quesito 7

Calcola il dominio della seguente funzione:

$$y = \sqrt{2 - \log_3(x + 1)}$$

Quesito 8

Risolvi il seguente integrale

$$S = \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x+1}} dx$$