



ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
SECONDA PROVA SCRITTA – Tema di: MATEMATICA

Indirizzo: LI02 EA02 - SCIENTIFICO LI15 - SCIENTIFICO AD INDIRIZZO SPORTIVO

Il candidato risolva a sua scelta uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti proposti.

Durata della prova 6 ore

PROBLEMA 1

Sia

$$f(x) = ae^x + be^{-x} + cx + d$$

con a, b, c e d numeri reali.

1. Si determinino a, b, c e d in modo che la funzione soddisfi le seguenti condizioni:
 - $P(0; 1)$ sia un punto di estremo relativo;
 - La derivata seconda $f''(x)$ sia una funzione pari;
 - $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2-1}{2e}$.
2. Dopo aver verificato che la funzione ottenuta è $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, la si studi e se ne disegni il grafico Γ .
3. Detta r la retta di equazione $y = 2$, si determini la lunghezza della corda da essa intercettata su Γ e si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Γ e r .
4. Dal grafico di $f(x)$ si ricavi quello della funzione reciproca $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ e si dimostri che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ è convergente.

PROBLEMA 2

Imprenditori coraggiosi

Questi ultimi anni sono stati segnati da eventi, tanto drammatici quanto inattesi. Un microrganismo ha messo in ginocchio tutti i popoli della terra, senza distinzioni sociali, geografiche, culturali. La tutela della salute umana ha imposto una serie di restrizioni che inevitabilmente hanno prodotto uno scossone in ambito economico, cambiando il destino di tantissime aziende.

In questi momenti di enorme difficoltà il mercato mondiale vacilla e in tutti i settori produttivi affiora un pervasivo pessimismo. In queste situazioni, il coraggio e la resilienza di molti favoriscono un più rapido ritorno alla normalità.

Una virtuosa azienda manifatturiera con una invidiabile tradizione familiare subisce, come tutte le altre attività, un notevole calo degli ordini, e quindi della produzione.

Di seguito riportiamo la funzione bilancio, che con buona approssimazione ripercorre le vicissitudini dell'azienda e fornisce una stima delle proiezioni future. Data la seguente funzione $b(x)$, si riporti sull'asse delle ascisse il tempo in anni e sull'asse delle ordinate il relativo bilancio in milioni di euro.

$$b(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{(x-4)^2 + 4} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2 \cdot (x-4)^2}{x^2 - 8x + 20} & x > 3 \end{cases}$$

Al fine di rispondere ai seguenti quesiti con opportune argomentazioni, si studi la funzione e se ne rappresenti il grafico.

1. *Fornisci il bilancio dell'azienda all'inizio dell'osservazione e determina il tempo che deve trascorrere perché il bilancio dell'azienda risulti in perdita. Rileva, poi, dal grafico il numero di mesi in cui il bilancio rimane in perdita.*

Raggiunto il minimo storico, l'azienda decide di aumentare il capitale al fine di sostenere le spese e investire in innovazione e ricerca.

2. *A quanto ammonta il bilancio negativo prima dell'investimento? Quale dato, nello studio della funzione, fornisce l'entità del rifinanziamento e a quanto ammonta il nuovo investimento societario?*
3. *Da cosa si deduce che i due tratti sono in realtà una traslazione della stessa funzione dovuta all'incremento di capitali?*

Il team per l'innovazione e la ricerca non produce benefici immediati. Infatti, dopo un periodo di operatività, il bilancio chiude in pareggio, ovvero l'azienda copre tutte le spese, ma non rimane alcun beneficio economico per gli azionisti.

4. *Dall'investimento di nuovi capitali, quanto tempo trascorre prima di rivedere il bilancio in crescita? Stando alle previsioni fornite dal modello matematico, quali possono essere, in termini di bilancio, le aspirazioni future dell'azienda (fornisci la risposta in milioni di euro)?*
5. *Grazie all'investimento nel campo dell'innovazione tra il quarto e l'ottavo anno vi è stata una forte crescita del bilancio. Qual è stato il valore medio nel corso del quadriennio (fornisci la risposta in milioni di euro)?*

QUESITI

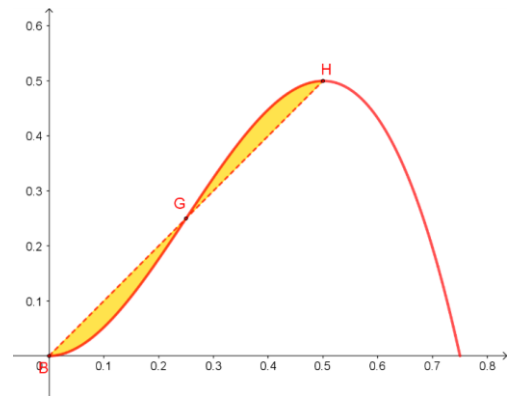
1. Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4} - x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 2]$ e determinare le coordinate del punto o dei punti di cui la tesi garantisce l'esistenza.
2. Data la funzione integrale $f(x) = \int_{-1}^x te^{t^2-1} dt$, determinare la retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa 1.
3. Discutere al variare di h il numero delle soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 3x^2 + h - 1 = 0$$

4. Nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ è rappresentato un tratto della curva di equazione

$$y = -8x^3 + 6x^2$$

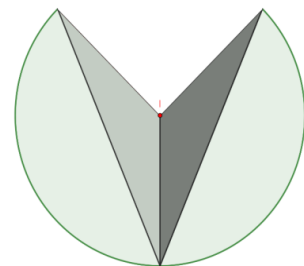
Dopo aver tracciato il segmento BH che unisce il minimo ed il massimo della curva nell'intervallo di riferimento, si verifichi che G , l'ulteriore punto di intersezione di BH con la funzione, è il punto medio del segmento BH e si calcoli l'area compresa tra il segmento BH e la curva.



5. Stabilire per quali valori di a e b si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2a - bx} - 2}{x} = \frac{1}{2}$$

6. Determinare l'altezza del cono inscritto in una sfera di raggio r , per il quale la superficie laterale è massima.
7. Un'azienda realizza il logo illustrato in figura. Per disegnarlo, rappresenta i $\frac{3}{4}$ di una circonferenza di raggio 2 cm, poi il raggio verticale che divide a metà il settore circolare ed infine il quadrilatero concavo come in figura. Qual è l'area del quadrilatero?



8. Si determini il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$