Punti notevoli di un tetraedro – Parte Prima
Baricentro, Circocentro, Incentro
di Antonino Giambò

1. In precedenti articoli pubblicati su questa medesima rubrica mi sono occupato dei punti notevoli di un triangolo. Volendo estendere la questione allo spazio ordinario, possiamo supporre che l'omologo del triangolo, il più semplice tra i poligoni, sia il tetraedro, il più semplice fra i poliedri. Ragion per cui appare legittimo domandarsi se, come nel triangolo, anche nel tetraedro ci siano dei punti notevoli, che meriti di segnalare.

In questo articolo mi propongo di approfondire il discorso in relazione a tre punti notevoli, presenti in ogni tetraedro: baricentro, circocentro e incentro. In un secondo articolo lo farò per l'ortocentro, che però, come vedremo, può essere o no presente in un tetraedro: dipende dal tipo di tetraedro. In un terzo articolo mi soffermerò invece su due tetraedri particolarmente interessanti: il tetraedro equifacciale e il tetraedro isodinamico.

Affronterò e svilupperò l'argomento con un approccio che chiamerei misto, poiché mi servirò, a seconda della convenienza, sia della Geometria sintetica sia della Geometria analitica.

Gli esempi numerici presentati sono un ottimo esercizio per gli studenti liceali nel cui curricolo sono presenti elementi di geometria dello spazio cartesiano.

2. Incominciamo con il baricentro, non prima di aver ricordato che ho fatto un cenno a questo argomento in un precedente articolo pubblicato su questa medesima rubrica: *Federico Commandino da Urbino e il suo teorema.*

Il problema della determinazione del baricentro di un tetraedro mise a dura prova matematici navigati.

«*… ai tempi di Archimede, come a quelli di Galileo, la sua risoluzione costituì un compito arduo. Quindi, volendo risolverlo partendo dai presupposti più semplici, è necessario cercare un problema analogo più facile; si presenta spontaneamente il corrispondente problema piano*.» [1]

Il problema piano al quale si riferisce il matematico ungherese è quello relativo al baricentro del triangolo.

Seguirò l'idea di Polya ma non esattamente il suo procedimento, anche se utilizzerò alcune sue indicazioni.

Incominciamo a prendere in considerazione un segmento AB, supposto appartenete ad una retta cartesiana (Ox) (figura 1). Possiamo legittimamente affermare che il baricentro del segmento è il suo punto medio G_1. Cosicché, se sono x_A e x_B le ascisse dei punti A e B rispettivamente, si ha, com'è noto:

$$x_{G_1} = \frac{x_A + x_B}{2},$$

vale a dire che l'ascissa del baricentro del segmento è la media aritmetica delle ascisse dei suoi punti estremi.

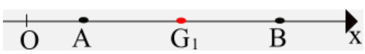

figura 1

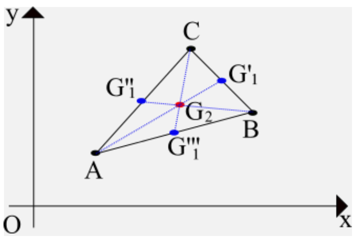

figura 2

Passando dalla retta al piano e, quindi, dal segmento al triangolo, prendiamo in considerazione il triangolo ABC, il cui piano è riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (figura 2).

Se $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ sono nell'ordine le coordinate dei vertici A, B, C, sappiamo che le coordinate del baricentro G_2 del triangolo sono le seguenti:

---

[1] George Polya, *Come risolvere i problemi di matematica*, Milano, Feltrinelli, Quarta edizione, 1983, pag. 58.
Polya fu un matematico ungherese, 1887-1985. Si occupò di vari argomenti di matematica e in particolare di teoria dei numeri, combinatoria, probabilità. Negli ultimi anni della sua vita si dedicò particolarmente ai metodi di risoluzione dei problemi.

(1) $$x_{G_2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,, \quad y_{G_2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,,$$

vale a dire che ciascuna coordinata del baricentro del triangolo è la media aritmetica delle coordinate omonime dei suoi vertici.

Passiamo ora al tetraedro di vertici A, B, C, D, immerso nello spazio riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz) (figura 3).

Se $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D)$ sono le coordinate dei punti A, B, C, D nell'ordine:

- quali sono le coordinate del baricentro G_3 del tetraedro?
- e poi, cosa deve intendersi per baricentro del tetraedro?

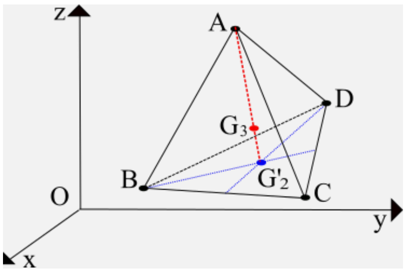

figura 3

Rispondo alla seconda domanda. Sappiamo che il baricentro di un triangolo è il punto in cui convergono le sue mediane, ricordando che mediana di un triangolo è il segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio (ossia il baricentro) del lato opposto.

Ebbene, estendendo questa definizione al tetraedro, possiamo definire ***mediana*** di un tetraedro il segmento che congiunge un suo vertice con il baricentro della faccia opposta. Cosicché, in un tetraedro ci sono 4 mediane.

Passando alla prima domanda e utilizzando ancora l'analogia, possiamo affermare che le quattro mediane di un tetraedro passano per uno stesso punto G_3 e che le sue coordinate sono le medie aritmetiche delle coordinate omonime dei suoi vertici, vale a dire le seguenti?

(2) $$x_{G_3} = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}\,, \quad y_{G_3} = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\,, \quad z_{G_3} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\,.$$

L'analogia farebbe pensare di sì, ma l'analogia non garantisce la verità della congettura poiché non è una vera dimostrazione e, pertanto, una dimostrazione è necessaria. È quello che ci accingiamo a fare.

Un'altra congettura, però, l'analogia ci consente di formulare ed è un'analogia fondamentale giacché su di essa poggerà il nostro ragionamento.

Nello spazio S_1 ad una dimensione, la seguente relazione lega l'estremo A all'estremo B e al baricentro G_1: $\overrightarrow{AG_1} = 1\,\overrightarrow{G_1B}$.

Nello spazio S_2 a due dimensioni, la seguente relazione lega un vertice del triangolo, mettiamo A, al baricentro G_1^I del lato opposto e al baricentro G_2 del triangolo: $\overrightarrow{AG_2} = 2\,\overrightarrow{G_2G_1^I}$. Analogamente per gli altri due vertici.

Ipotizziamo che nello spazio S_3 a tre dimensioni ci sia una relazione analoga che lega un vertice del tetraedro, mettiamo A, al baricentro G_2^I della faccia opposta. Sia allora G_3^I un punto della mediana AG_2^I del tetraedro tale che risulti: $\overrightarrow{AG_3^I} = 3\,\overrightarrow{G_3^IG_2^I}$. Passando dalla relazione vettoriale alle relazioni cartesiane, si ha:

$$x_{G_3^I} - x_A = 3\left(x_{G_2^I} - x_{G_3^I}\right), \quad y_{G_3^I} - y_A = 3\left(y_{G_2^I} - y_{G_3^I}\right), \quad z_{G_3^I} - z_A = 3\left(z_{G_2^I} - z_{G_3^I}\right).$$

Da qui, tenendo presente che, in base alle (1), risulta:

$$x_{G_2^I} = \frac{x_B + x_C + x_D}{3}\,, \quad y_{G_2^I} = \frac{y_B + y_C + y_D}{3}\,, \quad z_{G_2^I} = \frac{z_B + z_C + z_D}{3}\,,$$

si deducono facilmente le seguenti relazioni:

$$x_{G_3^I} = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}\,, \quad y_{G_3^I} = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\,, \quad z_{G_3^I} = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\,.$$

Ragionando allo stesso modo sulle altre tre mediane del tetraedro, indichiamo ora con $G_3^{II}, G_3^{III}, G_3^{IV}$ i punti delle mediane rispettivamente BG_2^{II}, CG_2^{III}, DG_2^{IV} tali che risulti:

$$\overrightarrow{BG_3^{II}} = 3\,\overrightarrow{G_3^{II}G_2^{II}}\,, \quad \overrightarrow{CG_3^{III}} = 3\,\overrightarrow{G_3^{III}G_2^{II}}\,. \quad \overrightarrow{DG_3^{IV}} = 3\,\overrightarrow{G_3^{IV}G_2^{IV}}\,.$$

Ebbene, si trova che i punti $G_3^{II}, G_3^{III}, G_3^{IV}$ hanno le medesime coordinate del punto G_3^{I}, vale a dire le stesse coordinate del punto G_3 fornite dalle relazioni (2).

Possiamo perciò enunciare le seguenti proprietà del baricentro di un tetraedro.

> PROPRIETÀ DEL BARICENTRO DI UN TETRAEDRO.
> a) le 4 mediane di un tetraedro convergono in uno stesso punto G_3, che si definisce **baricentro** del tetraedro, le cui coordinate sono le medie aritmetiche delle coordinate omonime dei suoi vertici, ottenute perciò dalle relazioni (2);
> b) il baricentro di un tetraedro divide ogni mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è tripla dell'altra;
> c) il baricentro di un tetraedro è sempre un punto interno al tetraedro.

3. Ci occupiamo adesso di ALTRE PROPRIETÀ del baricentro di un tetraedro.

- Due spigoli di un tetraedro si dicono *opposti* se non hanno un vertice in comune. Ci sono evidentemente 3 coppie di vertici opposti nel tetraedro di vertici A, B, C, D e sono le seguenti (figura 4): AB e CD, AC e BD, AD e BC.

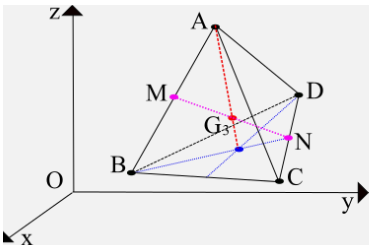

figura 4

Vale il seguente teorema.

TEOREMA. I segmenti che congiungono i punti medi di due spigoli opposti di un tetraedro convergono nel baricentro del tetraedro.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per la coppia di spigoli opposti AB e CD.

Chiamiamo M il punto medio dello spigolo AB ed N quello di CD. Si ha chiaramente:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\,,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\,,\ z_M=\frac{z_A+z_B}{2}\,; \qquad x_N=\frac{x_C+x_D}{2}\,,\ y_N=\frac{y_C+y_D}{2}\,,\ z_N=\frac{z_C+z_D}{2}\,.$$

Indicato ora con P il punto medio del segmento MN, risulta:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{\frac{x_A + x_B}{2} + \frac{x_C + x_D}{2}}{2} = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}\,,$$

$$y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{\frac{y_A + y_B}{2} + \frac{y_C + y_D}{2}}{2} = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\,,$$

$$z_P = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{\frac{z_A + z_B}{2} + \frac{z_C + z_D}{2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\,.$$

P coincide, pertanto, con il baricentro G_3 del tetraedro.

Analogamente per ognuna delle altre due coppie di spigoli opposti, AC-BD e AD-BC.

Questo basta per concludere che il teorema è dimostrato.

- Prendiamo in esame il tetraedro avente per vertici i baricentri delle sue facce (figura 5). Per analogia con il triangolo mediale lo definiamo ***tetraedro mediale*** del tetraedro di riferimento (ma potremmo chiamarlo ***tetraedro baricentrico*** del tetraedro di riferimento)

Questo tetraedro ha alcune caratteristiche che è interessante evidenziare. Per questo, indichiamo intanto con ABCD il tetraedro di riferimento, con A', B', C', D' i baricentri nell'ordine delle facce BCD, CDA, DAB, ABC, con M, N, P, Q i punti medi rispettivamente degli spigoli AB, BC, CD, DA.

Consideriamo il triangolo PAB e la sua corda A'B'. Si spiega facilmente che $\overline{PA} = 3\,\overline{PB'}$ e $\overline{PB} = 3\,\overline{PA'}$. I due triangoli PAB e PB'A', aventi due lati in proporzione e l'angolo fra essi compreso in comune, sono simili. Per cui risulta: $\overline{AB} = 3\,\overline{B'A'}$. Inoltre $B'A' \parallel AB$.

Analogamente:

- prendendo in esame il triangolo QBC e la sua corda C'B', si dimostra che $\overline{BC} = 3\,\overline{C'B'}$ e $C'B' \parallel BC$;
- prendendo in esame il triangolo MCD e la sua corda D'C', si dimostra che $\overline{CD} = 3\,\overline{D'C'}$ e $D'C' \parallel CD$;
- prendendo in esame il triangolo NDA e la sua corda A'D', si dimostra che $\overline{DA} = 3\,\overline{A'D'}$ e $A'D' \parallel DA$.

Tutto questo consente di trarre le seguenti conclusioni:

- il tetraedro mediale è simile al tetraedro di riferimento e il rapporto di similitudine è 1/3,
- la superficie del tetraedro mediale è $(1/3)^2 = 1/9$ di quella del tetraedro di riferimento,
- il volume del tetraedro mediale è $(1/3)^3 = 1/27$ di quello del tetraedro di riferimento,

• Un'altra proprietà del tetraedro mediale è espressa dal seguente teorema.

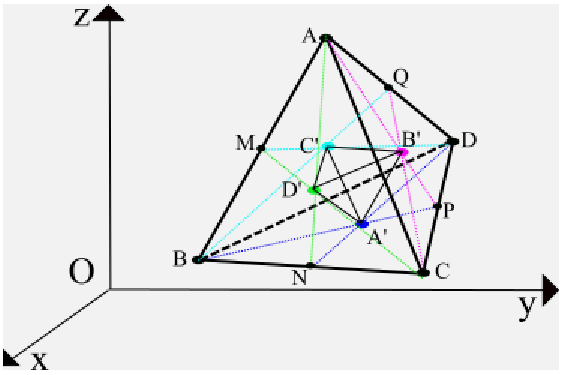

figura 5

TEOREMA. Il tetraedro mediale ha lo stesso baricentro del tetraedro di riferimento.

DIMOSTRAZIONE. Indicato con G il baricentro del tetraedro di riferimento ABCD (figura 5), sappiamo che le sue coordinate sono date dalle formule (2), dove il baricentro è indicato con G_3 anziché con G.

Dobbiamo dimostrare che anche il baricentro del tetraedro mediale ha le stesse coordinate.

Osserviamo intanto che il baricentro di questo tetraedro, che indichiamo provvisoriamente con G', ha le seguenti coordinate, sempre in base alle (2):

$$(2') \qquad x_{G'} = \frac{x_{A'}+x_{B'}+x_{C'}+x_{D'}}{4}\,,\quad y_{G'} = \frac{y_{A'}+y_{B'}+y_{C'}+y_{D'}}{4}\,,\quad z_{G'} = \frac{z_{A'}+z_{B'}+z_{C'}+z_{D'}}{4}.$$

D'altro canto:

$$x_{A'}+x_{B'}+x_{C'}+x_{D'} = \frac{x_B+x_C+x_D}{3} + \frac{x_C+x_D+x_A}{3} + \frac{x_D+x_A+x_B}{3} + \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = x_A+x_B+x_C+x_D\,,$$

per cui: $x_{G'} = x_G$.

Analogamente: $y_{G'} = y_G$, $z_{G'} = z_G$. In definitiva: G'=G. [c.v.d.]

• Il fatto che il tetraedro mediale sia simile al tetraedro di riferimento e che sia 1/3 il rapporto di similitudine, il fatto che i due tetraedri abbiano lo stesso baricentro e, infine, il fatto che gli spigoli dell'uno siano paralleli a quelli dell'altro, tutti questi fatti danno per dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA. Il tetraedro mediale è il trasformato del tetraedro di riferimento in base all'omotetia di centro G e caratteristica $-1/3$ (figura 6).

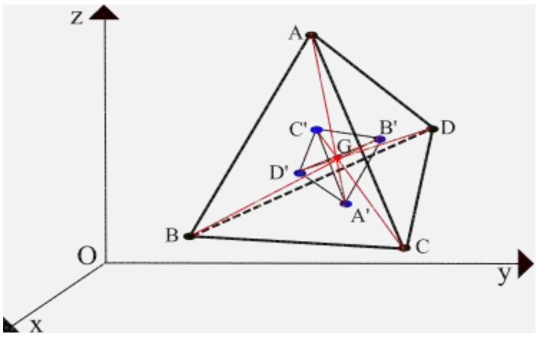

figura 6

• Il precedente teorema ne richiama alla mente uno simile relativo al baricentro di un triangolo e non è il solo. Vale infatti anche il seguente teorema, che pure ne fa ricordare un altro analogo relativo al baricentro di un triangolo.

TEOREMA. I segmenti che congiungono il baricentro di un tetraedro con i vertici dello stesso lo dividono in quattro tetraedri equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. Sia il tetraedro ABCD e sia G il suo baricentro. Se la retta AG è perpendicolare alla base BCD nel punto H_A, che in questo caso è anche baricentro della faccia BCD, sappiamo che $\overline{AG} = 3\,\overline{GH_A}$ per cui risulta $\overline{AH_A} = 4\,\overline{GH_A}$. Si spiega allora facilmente che il volume del tetraedro GBCD è $1/4$ del volume del tetraedro ABCD.

Supponiamo invece che AG non sia perpendicolare alla faccia BCD (figura 7).

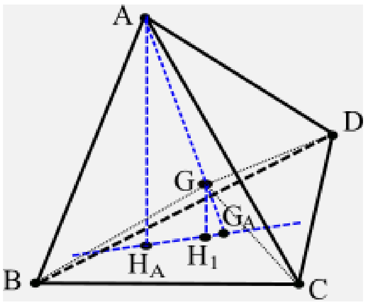

figura 7

Indicato allora con G_A il baricentro della faccia BCD, consideriamo la proiezione della retta AG sul piano di questa faccia. Essa è la retta contenente il punto G_A e i punti H_A e H_1, proiezioni sul piano BCD dei punti A e G rispettivamente. Si costata che sono simili i due triangoli rettangoli AH_AG_A e GH_1G_A e si desume che, siccome $\overline{AG_A}=4\,\overline{GG_A}$, risulta pure $\overline{AH_A}= 4\,\overline{GH_1}$. Come prima, si spiega facilmente che il volume del tetraedro GBCD è $1/4$ del volume del tetraedro ABCD.

Lo stesso si può dimostrare per gli altri tre tetraedri: GCDA, GDAB, GABC. Cosicché i segmenti che congiungono il baricentro con i vertici del tetraedro ABCD, lo dividono in quattro tetraedri, ciascuno dei quali è 1/4 del tetraedro ABCD, per cui questi quattro tetraedri sono equivalenti fra loro. [c.v.d.]

4. Il secondo punto notevole di un tetraedro, sul quale fermeremo la nostra attenzione è il circocentro.

- La sua esistenza è basata su un teorema, di cui ci occupiamo subito.

TEOREMA. I quattro vertici di ogni tetraedro sono situati su una superficie sferica (che è come dire che ad ogni tetraedro è circoscrivibile una sfera o, in modo equivalente, ogni tetraedro è inscrivibile in una sfera).

DIMOSTRAZIONE. È dato il tetraedro ABCD (figura 8). Chiamato E il circocentro della faccia BCD, si conduca per E la ratta r perpendicolare al piano di questa faccia. Si spiega agevolmente che i punti di r sono equidistanti dai vertici B, C, D. Si tratta allora di trovare su r un punto K che sia equidistante dal vertice A e da uno degli altri due vertici del tetraedro, mettiamo B. Per questo, è sufficiente condurre il piano α perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio (è il cosiddetto piano assiale del segmento): i punti di questo piano sono infatti equidistanti da A e da B. Questo piano α interseca r esattamente nel punto K cercato.

Il punto K è dunque equidistante dai quattro vertici del tetraedro, per cui la sfera avente il centro in K e raggio uguale alla distanza di K da uno dei vertici del tetraedro è circoscritta al tetraedro medesimo.

Il punto K si denomina **circocentro** del tetraedro.

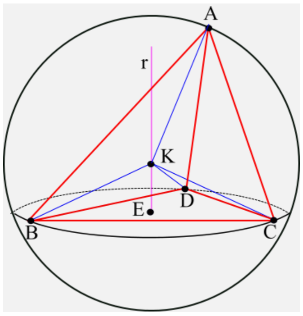

figura 8

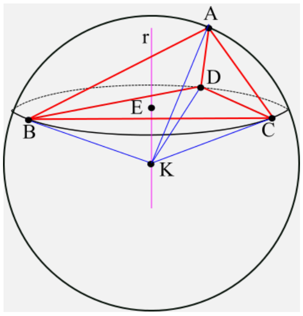

figura 9

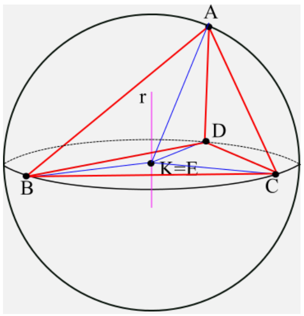

figura 10

Come il circoncentro di un triangolo, anche il circocentro di un tetraedro può essere interno al tetraedro (figura 8) oppure esterno ad esso (figura 9), o infine giacere sul suo contorno, ovvero su una delle facce del tetraedro (figura 10).

- Vale il seguente teorema, che si dimostra facilmente.

TEOREMA. La perpendicolare ad ogni faccia del tetraedro, condotta per il circocentro della faccia medesima, passa per il circocentro del tetraedro.

- Come per il circocentro di un triangolo neanche per il circocentro di un tetraedro esistono formule che ne esprimano le coordinate per mezzo delle coordinate dei vertici, perlomeno non formule utilizzabili facilmente. Per questa ragione, una volta assegnato un tetraedro mediante le coordinate dei suoi vertici, se si richiedono le coordinate del suo circocentro, bisogna procedere direttamente.

Questo può avvenire in due modi diversi:

a) si trova l'equazione della sfera passante per i vertici del tetraedro: il suo centro è il circocentro del tetraedro assegnato;

b) si trovano le equazioni della retta r su descritta e quella del piano assiale α del segmento AB, pure considerati sopra: l'intersezione di r con α è il circocentro del tetraedro.

Il primo modo è normalmente più comodo e ad esso ci affidiamo per la risoluzione del seguente esercizio.

ESERCIZIO. È assegnato il tetraedro di vertici $A(9,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,12)$, $D(0,0,0)$. Trovare le coordinate del suo circocentro.

RISOLUZIONE. La sfera passa evidentemente per l'origine O=D del sistema di riferimento, per cui la sua equazione è del tipo seguente:

$$x^2+y^2+z^2+a\,x+b\,y+c\,z=0\,.$$

Le condizioni che passi per i punti A, B, C si traducono nelle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c:

$$81+9\,a=0,\quad 9+3\,b=0,\quad 144+12\,c=0\,.$$

Si ha pertanto:

$$a=-9,\quad b=-3,\quad c=-12\,.$$

L'equazione della sfera passante per i punti assegnati è, pertanto, la seguente:

$$x^2+y^2+z^2-9\,x-3\,y-12\,z=0\,.$$

E il suo centro, vale a dire il circocentro K del tetraedro assegnato, ha allora le seguenti coordinate:

$$x_K=\frac{a}{2}=\frac{9}{2},\quad y_K=\frac{b}{2}=\frac{3}{2},\quad z_K=\frac{c}{2}=6\,.$$

Si può calcolare anche la lunghezza R del raggio della sfera, che è $R=117/2$.

Una figura (figura 11) visualizza la situazione.

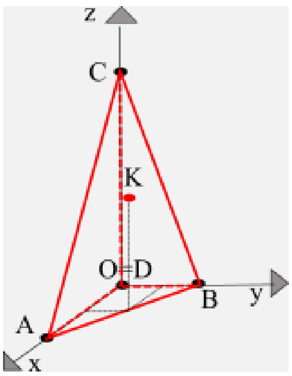

figura 11

5. Ogni tetraedro ha sei angoli diedri e per ognuno di questi diedri esiste un piano, contenente lo spigolo del diedro (che è anche spigolo del tetraedro), che lo divide internamente in due parti uguali: si denomina *piano bisettore*. Come la bisettrice di un angolo interno di un triangolo, anche i punti del piano bisettore di un angolo diedro sono equidistanti dalle facce del diedro (che sono anche le facce del tetraedro). Come si dimostra che le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto, che è equidistante dai lati dell'angolo, allo stesso modo si dimostra che i sei bisettori degli angoli diedri si incontrano in un punto I, che è equidistante dalle facce del diedro.

Questo punto I è anche il centro di una sfera tangente alle quattro facce del diedro e si denomina **incentro** del tetraedro. È sempre un punto interno al tetraedro.

Per la determinazione delle sue coordinate non esistono formule spendibili, per cui bisogna procedere direttamente, di volta in volta, ovviamente quando siano assegnate le coordinate dei vertici del tetraedro.

Il procedimento da seguire è piuttosto lungo e implica i seguenti passaggi:

- si trovano le equazioni dei piani delle facce del tetraedro;
- si trovano le equazioni di tre idonei piani bisettori;
- si risolve il sistema delle equazioni dei tre piani bisettori: la soluzione di questo sistema fornisce le coordinate dell'incentro del tetraedro.

ESERCIZIO. Con riferimento allo stesso tetraedro proposto nell'esercizio precedente, determinare le coordinate del suo incentro.

RISOLUZIONE. Forniamo i passaggi essenziali.

a) Si trovano le equazioni delle facce del tetraedro:

$$ABC \equiv 4x + 12y + 3z - 36 = 0,\quad BCD \equiv x = 0,\quad CDA \equiv y = 0,\quad ABD \equiv z = 0.$$

b) Si trovano le equazioni di tre piani bisettori, per esempio quelli delle facce ABC e BCD, ABC e CDA, CDA e ABD:

- Piano bisettore dell'angolo diedro formato dalle facce ABC e BCD, di spigolo BC:

$$\frac{|4x + 12y + 3z - 36|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}} = |x| \quad \text{ossia:} \quad 4x + 12y + 3z - 36 = \pm 13x\,;$$

si ottengono due piani bisettori:

$$\beta_{BC} \equiv 17x + 12y + 3z - 36 = 0\,,\quad \beta'_{BC} \equiv 3x - 4y - z + 12 = 0\,;$$

il primo è bisettore del diedro interno, il secondo del diedro esterno.

- Piano bisettore dell'angolo diedro formato dalle facce ABC e CDA, di spigolo AC:

$$\frac{|4x + 12y + 3z - 36|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}} = |y| \quad \text{ossia:} \quad 4x + 12y + 3z - 36 = \pm 13y\,;$$

si ottengono due piani bisettori:

$$\beta_{AC} \equiv 4x + 25y + 3z - 36 = 0\,,\quad \beta'_{AC} \equiv 4x - y + 3z - 36 = 0\,;$$

il primo è bisettore del diedro interno, il secondo del diedro esterno.

- Piano bisettore dell'angolo diedro formato dalle facce CDA e ABD, di spigolo AD:

$$|y| = |z| \quad \text{ossia:} \quad y = \pm z\,;$$

si ottengono due piani bisettori:

$$\beta_{AD} \equiv y - z = 0\,,\quad \beta'_{AD} \equiv y + z = 0\,;$$

il primo è bisettore del diedro interno, il secondo del diedro esterno.

Detto per la cronaca, i due piani bisettori di uno stesso angolo diedro (interno ed esterno) sono perpendicolari, cosa che si sa dalla geometria elementare e che comunque può essere verificata.

A questo punto si risolve il sistema delle equazioni dei piani bisettori $\beta_{BC}, \beta_{AC}, \beta_{AD}$, vale a dire il seguente sistema:

$$\begin{cases} 17x + 12y + 3z - 36 = 0 \\ 4x + 25y + 3z - 36 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e, a conti fatti, si ottengono le coordinate dell'incentro I del tetraedro:

$$I\left(\frac{117}{104}, \frac{117}{104}, \frac{117}{104}\right).$$

Si capisce che il raggio r della sfera inscritta nel tetraedro ha lunghezza $117/104$.

Una figura (figura 12) visualizza la situazione integrando la precedente figura 11 con l'inserimento non solo dell'incentro I ma anche del baricentro $G\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, 3\right)$. ma senza rispettare le proporzioni al fine di renderla più chiara.

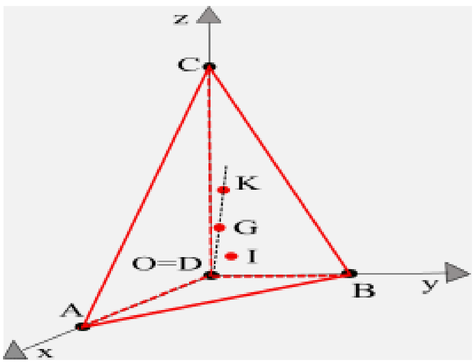

figura 12

La figura mostra, fra l'altro, che i punti K e G sono allineati con l'origine O del riferimento cartesiano, e inoltre che G è punto medio di DK. La retta di questi punti, alla quale non appartiene il punto I, ha le seguenti equazioni:

$$\frac{x}{3} = y = \frac{z}{4}.$$

6. Nel tetraedro, sul quale abbiamo ragionato sopra, tre delle quattro facce sono triangoli rettangoli: esso si denomina per questo *tetraedro trirettangolo*.

Esistono anche *tetraedri quadrirettangoli*, vale a dire tetraedri le cui facce sono tutte e quattro triangoli rettangoli.

Per provarlo, consideriamo un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC (figura 13) e per il punto C conduciamo la perpendicolare al suo piano. Su questa perpendicolare prendiamo un qualsiasi punto D. Il tetraedro di vertici A, B, C, D è un tetraedro quadrirettangolo. Ora, che le facce ABC, ACD, BCD siano triangoli rettangoli, è del tutto evidente.

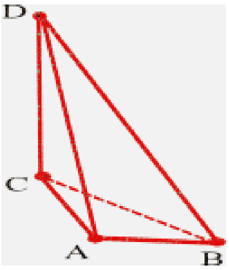

figura 13

Bisogna provare che è un triangolo rettangolo anche la faccia ABD. Di fatto, siccome dal piede C della perpendicolare DC al piano ABC è condotta la retta CA perpendicolare alla retta AB di questo piano, quest'ultima retta AB, in virtù del celebre "teorema delle tre perpendicolari", risulta perpendicolare al piano α delle prime due rette DC e CA e pertanto la retta AB risulta perpendicolare alla retta AD, contenuta nel piano α.

Questo tetraedro ha una caratteristica: **il suo circocentro K è il punto medio dello spigolo BD**.

Per dimostrarlo, riferiamo il solido ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz) in modo che l'origine O coincida con il vertice C, l'asse x con la retta CA orientata da C verso A, il piano Oxy con il piano del triangolo ABC, l'asse z con la retta CD orientata da C verso D (figura 14). Assumiamo poi, per i vertici del tetraedro, le seguenti coordinate:

$A(p,0,0),\quad B(p,q,0),\quad C(0,0,0),\quad D(0,0,r),$

dove, p, q, r sono numeri reali positivi.

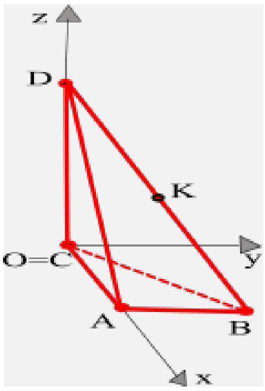

figura 14

Com'è noto, il circocentro del tetraedro è il centro della sfera ad esso circoscritta. Si tratta perciò di trovare l'equazione di questa sfera.

Sapendo già che essa passa per l'origine del sistema di riferimento, la sua equazione è del tipo seguente:

$$x^2+y^2+z^2+a\,x+b\,y+c\,z=0.$$

Imponendo le condizioni che passi per i punti A, B, D, si ottengono le seguenti equazioni nelle incognite a, b, c:

$$p^2+p\,a=0,\quad p^2+q^2+p\,a+p\,b=0,\quad r^2+r\,c=0.$$

Una volta risolto il loro sistema, si trova:

$$a=-p,\quad b=-q,\quad c=-r.$$

L'equazione della sfera circoscritta al tetraedro è pertanto la seguente:

$$x^2+y^2+z^2-p\,x-q\,y-r\,z=0.$$

Il suo centro è il punto K tale che:

$$K\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2},\frac{r}{2}\right),$$

che è esattamente il punto medio dello spigolo BD.