Punti notevoli di un tetraedro – Parte Seconda
Il tetraedro ortocentrico
di Antonino Giambò

1. Riprendiamo il discorso sui punti notevoli di un tetraedro, occupandoci adesso dell'ortocentro.

Mentre baricentro, circocentro e incentro di un tetraedro esistono sempre, qualunque sia il tetraedro, non è così per l'ortocentro, intendendo con questo nome il punto, ammesso che esista, in cui convergono le altezze del tetraedro.

Al fine di giustificare quanto detto, riporto un esempio e un controesempio: nel primo l'ortocentro esiste, nel secondo no.

- ESEMPIO. Sia il tetraedro ABCD (figura 1) di vertici $A(9,0,0), B(0,3,0), C(0,0,12), D(0,0,0)$, già preso in esame nell'articolo, parte prima, che tratta di questo medesimo argomento. Non ci vuol molto a capire che le altezze del tetraedro convergono tutte in D.

Il punto D è pertanto l'**ortocentro** del tetraedro, il quale, in tal caso, si denomina ***tetraedro ortocentrico***.

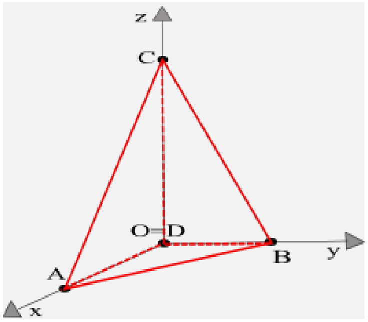

figura 1

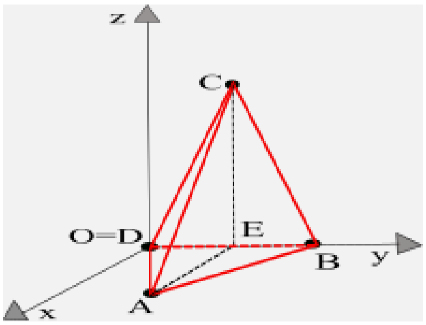

figura 2

- CONTROESEMPIO. Sia il tetraedro ABCD (figura 2) di vertici $A(2,2,0), B(0,4,0), C(0,2,3), D(0,0,0)$. Si capisce facilmente che il punto $E(0,2,0)$ risulta essere sia il piede dell'altezza del tetraedro condotta per A sia di quella condotta per C. Cosicché, se il tetraedro ammettesse ortocentro, questo dovrebbe essere proprio il punto E. Ma non ci vuol molto a capire che né l'altezza condotta per B né quella condotta per D passano per E. Ragion per cui il tetraedro non ammette ortocentro.

Comunque sia, questo può essere verificato analiticamente. Ed è quello che facciamo. Per questo troviamo anzitutto le equazioni delle facce del tetraedro:
- la faccia ABC ha equazione: $3x + 3y + 2z - 12 = 0$;
- la faccia BCD ha equazione: $x = 0$;
- la faccia CDA ha equazione: $3x - 3y + 2z = 0$;
- la faccia DAB ha equazione: $z = 0$.

Possiamo determinare adesso le equazioni delle altezze del tetraedro, che indichiamo con h_A, h_B, h_C, h_D:
$$h_A \equiv (y = 2,\ z = 0),\ \ h_B \equiv \left(\frac{x}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{2}\right),\ \ h_C \equiv (x = 0,\ y = 2),\ \ h_D \equiv \left(\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{x}{2}\right).$$
Intersecando le altezze h_A e h_C, si ottiene il loro punto comune $E(0,2,0)$, il quale però non appartiene a nessuna delle altre due altezze. Il tetraedro, quindi, non è ortocentrico.

2. Si pone, a questo punto, un interrogativo interessante: esiste un qualche criterio che permetta di riconoscere se un dato tetraedro è o no ortocentrico?

- Abbiamo visto sopra che se il tetraedro è *trirettangolo*, se cioè sono triangoli rettangoli le facce che concorrono in uno stesso vertice, il tetraedro ammette l'ortocentro e questo è esattamente il vertice sunnominato. Ora, si sa che il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo è ortocentro del triangolo. Quindi, considerato quanto già esposto, possiamo costatare che, in un tetraedro ortocentrico, c'è almeno un'altezza che cade nell'ortocentro della faccia opposta.

Ebbene, questo è proprio il criterio che andavamo cercando.

CRITERIO. **Un tetraedro è ortocentrico se almeno una sua altezza cade nell'ortocentro della faccia opposta**.

Il criterio suggerisce il seguente procedimento idoneo alla costruzione di un tetraedro ortocentrico: dato un triangolo qualsiasi ABC, si tracciano le sue altezze al fine di individuare il suo ortocentro H_D; si traccia quindi per H_D la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prende su di essa un qualsiasi punto D distinto da H_D. Il tetraedro ABCD (figura 3) è un tetraedro ortocentrico.

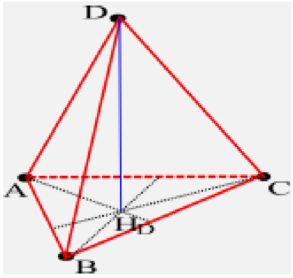

figura 3

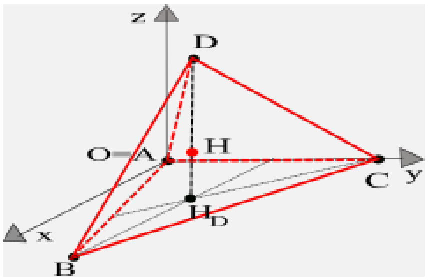

figura 4

- Vogliamo verificare ciò con un apposito esercizio.

ESERCIZIO. È dato il triangolo ABC di vertici A $(0,0,0)$, B $(9,6,0)$, C $(0,12,0)$. Dopo aver trovato le coordinate del suo ortocentro H_D, trovare le equazioni della retta perpendicolare condotta per H_D al piano del triangolo e prendere su questa retta un qualsiasi punto D (a scelta), distinto da H_D. Verificare che il tetraedro ABCD è un tetraedro ortocentrico e trovare le coordinate dell'ortocentro.

RISOLUZIONE. Troviamo nel piano (Oxy), al quale appartiene la faccia ABC del tetraedro (figura 4), l'equazione dell'altezza del triangolo uscente da B (che è $y=6$) e quella uscente da C (che è $y=-\frac{3}{2}x+12$). L'intersezione di queste due rette è il punto H_D, ortocentro della faccia ABC: le sue coordinate nello spazio (Oxyz) sono $H_D(4,6,0)$. La perpendicolare al piano di questa faccia, condotta per l'ortocentro H_D, è la retta h_D dell'altezza del tetraedro condotta per D. Prendiamo su di essa, in maniera del tutto arbitraria, il punto D $(4,6,8)$ e fermiamo l'attenzione sul tetraedro ABCD.

Troviamo per prima cosa le equazioni delle sue facce BCD, CDA, DAB:

$$BCD \equiv 8\,x+12\,y+5\,z-144=0\,,\quad CDA \equiv 2\,x-z=0\,,\quad DAB \equiv 8\,x-12\,y+5\,z=0\,.$$

Troviamo adesso le equazioni delle altezze h_A, h_B, h_C del tetraedro condotte rispettivamente per A, B, C:

$$h_A \equiv \left(\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{5}\right),\quad h_B \equiv (y=6\,,\ \ x+2z=9),\quad h_C \equiv \left(\frac{x}{8}=\frac{y-12}{-12}=\frac{z}{5}\right).$$

Intersecando una di queste due rette, per esempio h_B, con la retta $h_D \equiv (x{=}4, y{=}6)$, si ottiene il punto di coordinate $\left(4,6,\frac{5}{2}\right)$ e si può controllare che esso verifica le equazioni delle altre due rette, per cui appartiene anche ad esse.

Possiamo così concludere che le quattro altezze del tetraedro passano per uno stesso punto, che è naturalmente l'ortocentro del tetraedro:

$$H\left(4,6,\frac{5}{2}\right).$$

Il tetraedro è perciò un tetraedro ortocentrico.

- Come l'ortocentro di un triangolo anche l'ortocentro di un tetraedro, ovviamente ortocentrico, può essere un punto interno ad esso o esterno o infine situato sul suo contorno.

3. Abbiamo dunque appreso che un tetraedro è ortocentrico se almeno una sua altezza cade nell'ortocentro della faccia opposta. Sorge spontanea una nuova domanda: forse anche le altre tre altezze cadono negli ortocentri delle relative facce opposte? Effettivamente è così.

- Potremmo verificarlo nel caso del particolare tetraedro trirettangolo già preso in esame. Ma, considerato che non ci sono difficoltà di calcolo, vogliamo dimostrare questo fatto per un tetraedro trirettangolo qualunque, anche se il procedimento non è breve. Ovviamente fisseremo un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), precisamente un sistema in cui le coordinate dei vertici del tetraedro (figura 5) siano le seguenti:

$$A(a,0,0),\ \ B(0,b,0),\ \ C(0,0,c),\ \ D(0,0,0),$$

essendo a, b, c numeri reali positivi qualunque.

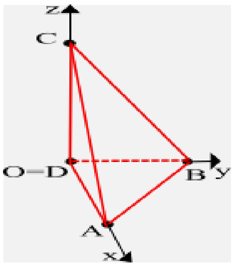

figura 5

Ora, è evidente che il punto D, cioè il vertice nel quale convergono i tre angoli retti, è ortocentro delle facce DAB, DBC, DCA. Cosicché le altezze del tetraedro uscenti da A, B, C – vale a dire AD, BD, CD – cadono esattamente nell'ortocentro delle relative facce opposte. Si tratta allora di verificare che anche l'altezza uscente da D cade nell'ortocentro della faccia ABC. Ma questo è un po' più complicato.

Ci occorrono chiaramente sia le coordinate del punto in cui l'altezza h_D del tetraedro condotta per D interseca la faccia ABC sia quelle dell'ortocentro di questa faccia, per controllare che i due punti coincidono.

Per tutto ciò serve anzitutto l'equazione del piano della faccia ABC. Essa è la seguente:

$$ABC \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{ossia:} \quad b\,c\,x+c\,a\,y+a\,b\,z=a\,b\,c\,.$$

Ricordando la condizione di ortogonalità fra retta e piano, si ha allora:

$$h_D \equiv \left(\frac{x}{b\,c}=\frac{y}{c\,a}=\frac{z}{a\,b}\right) \quad \text{o anche:} \quad h_D \equiv (a\,x-b\,y=0,\ \ a\,x-c\,z=0).$$

Il punto H_D, in cui questa altezza interseca il piano della faccia ABC, ha perciò come coordinate la soluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} a\,x-b\,y=0 \\ a\,x-c\,z=0 \\ b\,c\,x+c\,a\,y+a\,b\,z=a\,b\,c \end{cases}$$

A conti fatti si trova:

$$H_D\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\ \frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\ \frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right).$$

Andiamo a trovare adesso le coordinate dell'ortocentro del triangolo ABC. Per questo servono le equazioni di due sue altezze, per esempio quelle uscenti da A e da B. Ricordando che, nello spazio, ogni retta è concepita come l'intersezione di due piani, costatiamo per prima cosa che uno dei due piani, per ciascuna delle due altezze prese in considerazione, è proprio il piano ABC, di cui conosciamo già l'equazione.

Riguardo l'altezza per A, il secondo piano è il piano condotto per A perpendicolarmente alla retta BC, ossia il luogo dei punti $P(x,y,z)$ tali che risulti nullo il prodotto scalare dei due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BC}$, cioè: $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Siccome: $\overrightarrow{AP}\ (x-a,y,z)$ e $\overrightarrow{BC}\ (0,-b,c)$, allora:

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \ \text{ implica } \ 0\cdot(x-a)-b\,y+c\,z=0\,, \quad \text{vale a dire:} \quad b\,y-c\,z=0\,.$$

Riguardo all'altezza per B, il secondo piano è il luogo dei punti $P(x,y,z)$ tali che risulti: $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Siccome: $\overrightarrow{BP}\ (x,y-b,z)$ e $\overrightarrow{AC}\ (-a,0,c)$, allora si ha:

$$-a\,x+0\cdot b\,(y-b)+c\,z=0\,, \quad \text{vale a dire:} \quad a\,x-c\,z=0\,.$$

L'ortocentro del triangolo ABC è allora il punto le cui coordinate si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} b\,y - c\,z = 0 \\ a\,x - c\,z = 0 \\ b\,c\,x + c\,a\,y + a\,b\,z = a\,b\,c \end{cases}$$

e si trova agevolmente che si ottiene lo stesso punto H_D.

- Come secondo esempio, ma questa volta solo per una verifica, fermiamo l'attenzione sul tetraedro di vertici (figura 6):

$$A(0,0,0),\ \ B(12,6,0),\ \ C(6,12,0),\ \ D(8,8,8).$$

Si controlla anzitutto che si tratta di un tetraedro ortocentrico. Per questo basta verificare che una sua altezza, per esempio quella uscente da D, cade nell'ortocentro della faccia opposta.

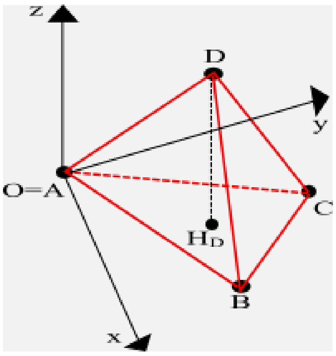

figura 6

Costatato allora che il piano della faccia ABC è il piano xy, di equazione z=0, si trova subito che l'altezza del tetraedro condotta per D interseca questo piano nel punto $H_D(8,8,0)$.

Troviamo adesso l'ortocentro della faccia ABC. Esso è il punto intersezione di due delle altezze del triangolo ABC, per esempio quelle condotte rispettivamente per A e B. Siccome queste altezze, che sono contenute nel piano xy (la cui equazione è z=0) hanno in questo piano equazioni nell'ordine:

$$y = x\,,\ \ y = -\frac{1}{2}x + 12\,,$$

una volta risolto il sistema di queste due equazioni, tenendo presente che la terza coordinata è nulla, si trova che l'ortocentro della faccia ABC è il punto di coordinate $(8,8,0)$, vale a dire proprio il punto H_D.

Tanto basta per concludere che il tetraedro in esame è ortocentrico.

Adesso bisogna verificare che anche le altre altezze cadono negli ortocentri delle relative facce opposte.

Servono per prima cosa le equazioni dei piani di queste tre facce. Si trova che sono le seguenti:

$$ABD \equiv x - 2\,y + z = 0\,,\ \ ACD \equiv 2\,x - y - z = 0\,,\ \ BCD \equiv 4\,x + 4\,y + z - 72 = 0\,.$$

Si trovano adesso le equazioni delle altezze h_A, h_B, h_C, condotte rispettivamente per i vertici A, B, C:

$$h_A \equiv \frac{x}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}\,,\ \ h_B \equiv \frac{x-12}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{-1}\,,\ \ h_C \equiv \frac{x-6}{1} = \frac{y-12}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Troviamo dapprima i piedi delle altezze.

Il piede H_A dell'altezza condotta per A è il punto intersezione della retta h_A con il piano BCD. Si ottiene risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4\,z = 0 \\ 4\,x + 4\,y + z - 72 = 0 \end{cases}$$

Si trova: $H_A\left(\frac{96}{11},\frac{96}{11},\frac{24}{11}\right)$.

Ragionando allo stesso modo sulle altre altezze, si trova: $H_B(6,9,3), H_C(9,6,3)$.

Troviamo adesso gli ortocentri delle tre facce del tetraedro.

- L'ortocentro della faccia ABD è il punto intersezione di due delle altezze del triangolo ABD, per esempio quelle condotte rispettivamente per B e D. Siccome queste altezze hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ x+y+z-18=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ 2x+y-24=0 \end{cases}$$

una volta risolto il loro sistema, si trova che l'ortocentro della faccia ABD è il punto di coordinate $(9, 6, 3)$, vale a dire il punto H_C.

- L'ortocentro della faccia ACD è il punto intersezione di due delle altezze del triangolo ACD, per esempio quelle condotte rispettivamente per C e D. Siccome queste altezze hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ x+y+z-18=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ x+2y-24=0 \end{cases}$$

una volta risolto il loro sistema, si trova che l'ortocentro della faccia ACD è il punto di coordinate $(6, 9, 3)$, vale a dire il punto H_B.

- L'ortocentro della faccia BCD è il punto intersezione di due delle altezze del triangolo BCD, per esempio quelle condotte rispettivamente per B e C. Siccome queste altezze hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ x-2y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\,y+z=0 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases}$$

una volta risolto il loro sistema, si trova che l'ortocentro della faccia BCD è il punto di coordinate $\left(\frac{96}{11}, \frac{96}{11}, \frac{24}{11}\right)$, vale a dire il punto H_A.

- Quello che abbiamo costatato in due casi, vale sempre. Ossia:

In un tetraedro ortocentrico ogni altezza cade nell'ortocentro della faccia opposta.

E di conseguenza, in virtù della proposizione contronominale di questa proposizione, si ha che:

Se un'altezza di un tetraedro non cade nell'ortocentro della faccia opposta, allora il tetraedro non è ortocentrico.

4. Il tetraedro ortocentrico, in relazione ai suoi punti notevoli, gode di alcune proprietà interessanti che, sotto alcuni aspetti, ricordano analoghe proprietà del triangolo.

- Una prima proprietà è la seguente.

PROPRIETÀ 1. ***In un tetraedro ortocentrico, baricentro, circocentro e ortocentro sono allineati e il baricentro è il punto medio del segmento avente per estremi gli altri due punti***.

Questa proprietà, che può essere dimostrata facilmente nel caso del tetraedro trirettangolo già preso in esame (figura 4), può essere invece verificata per il tetraedro rappresentato in figura 6. Di fatto, una volta calcolate le coordinate del baricentro G e del circocentro K e costatato che si ha;

$$G\left(\frac{13}{4}, 6, 2\right), \quad K\left(\frac{5}{2}, 6, \frac{3}{2}\right),$$

si verifica facilmente che G risulta essere il punto medio di HK.

Un'idonea figura (figura 7) evidenzia questi fatti.

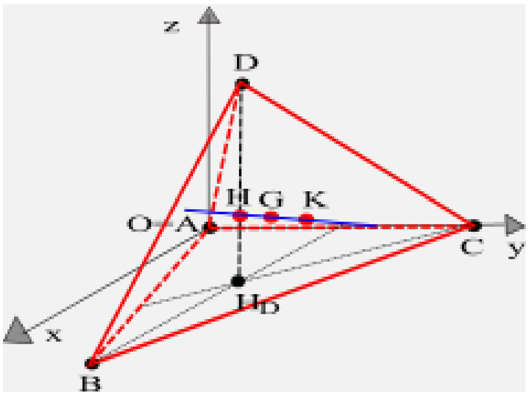

figura 7

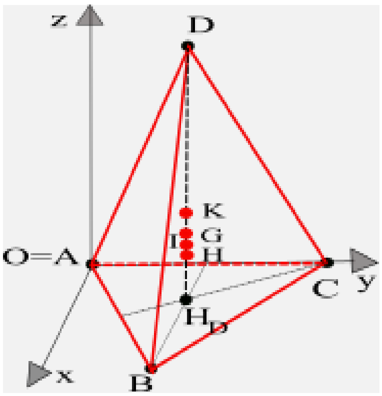

figura 8

- Qualora il tetraedro sia una piramide triangolare regolare, e quindi è certamente un tetraedro ortocentrico, il baricentro G, il circocentro K, l'ortocentro H sono situati sull'altezza propriamente detta della piramide ed anche l'incentro I è situato su di essa. Ma mentre baricentro e incentro sono punti interni alla piramide, invece circocentro e ortocentro possono essere interni ad essa o esterni o situati sul suo contorno.

Un particolare esempio di questa situazione è fornito dal tetraedro ABCD (piramide triangolare regolare di base ABC e vertice D – figura 8), i cui vertici hanno le seguenti coordinate:

$$\mathrm{A}(0{,}0{,}0),\ \ \mathrm{B}\left(3\sqrt{3},3{,}0\right),\ \ \mathrm{C}(0{,}6{,}0),\ \ \mathrm{D}\left(\sqrt{3},3,{,}6\right).$$

I punti G, K, H, I sono, in questo caso, tutti interni alla piramide ed hanno, a loro volta, le seguenti coordinate:

$$\mathrm{G}\left(\sqrt{3}.3,\frac{3}{2}\right),\ \ \mathrm{K}\left(\sqrt{3},2,2\right),\ \ \mathrm{H}\left(\sqrt{3},3,1\right),\ \ \mathrm{I}\left(\sqrt{3},3,\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right).$$

Se poi il tetraedro è un tetraedro regolare, allora i quattro punti G, K, H, I coincidono e questo punto è il *centro* del tetraedro.

Un esempio particolare è quello del tetraedro i cui vertici hanno le seguenti coordinate:

$$\mathrm{A}(0{,}0{,}0),\ \ \mathrm{B}\left(3\sqrt{3},3{,}0\right),\ \ \mathrm{C}(0{,}6{,}0),\ \ \mathrm{D}\left(\sqrt{3},3,2\sqrt{6}\right).$$

Si può agevolmente verificare che si tratta di un tetraedro regolare, il cui centro è il punto di coordinate:

$$\left(\sqrt{3},3,\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

- Sappiamo (cfr.: *Punti notevoli di un tetraedro – Parte Prima*) che il tetraedro mediale di un qualsiasi tetraedro è il trasformato del tetraedro di riferimento in base all'omotetia avente il centro nel baricentro comune dei due tetraedri e caratteristica $-1/3$.

Ora, se il tetraedro di riferimento è ortocentrico, a motivo della similitudine suddetta, anche il tetraedro mediale lo è. Ne consegue che, se H è l'ortocentro del tetraedro di riferimento, il suo omologo nell'omotetia è naturalmente l'ortocentro H' del tetraedro mediale. E se è G il baricentro comune ai due tetraedri, risulta: $\overrightarrow{\mathrm{GH}'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{GH}}$. Vale pertanto la seguente nuova proprietà.

PROPRIETÀ 2. ***L'ortocentro H' del tetraedro mediale di un tetraedro ortocentrico e l'ortocentro H di quest'ultimo tetraedro sono allineati con il baricentro comune G dei due tetraedri, il quale baricentro divide il segmento HH' in due parti tali che HG è il triplo di GH'***.

- Sappiamo ancora che in un qualsiasi tetraedro i segmenti che congiungono i punti medi di due spigoli opposti convergono nel baricentro del tetraedro. Se il tetraedro è ortocentrico, vale anche la seguente proprietà.

PROPRIETÀ 3. ***I segmenti che congiungono i punti medi di due spigoli opposti di un tetraedro ortocentrico sono uguali e viceversa, se tali segmenti sono uguali, il tetraedro è ortocentrico***.

Ci soffermiamo solo sulla prima parte.

Che essa valga per un tetraedro regolare è evidente. Verifichiamo che vale per il tetraedro di vertici $\mathrm{A}\ (0, 0, 0), \mathrm{B}\ (9, 6, 0), \mathrm{C}\ (0, 12, 0), \mathrm{D}\ (4, 6, 8)$, già preso in esame (figura 4).

Una volta costatato che le coppie di spigoli opposti sono le seguenti:

$$\text{AB-CD, di punti medi }\ \mathrm{M_{AB}}\left(\frac{9}{2},3,0\right),\mathrm{M_{CD}}(2,9,4),\quad \text{AC-BD, di punti medi }\ \mathrm{M_{AC}}(0,6,0),\mathrm{M_{BD}}\left(\frac{13}{2},6,4\right),$$

$$\text{AD-BC, di punti medi }\ \mathrm{M_{AD}}(2,3,4),\mathrm{M_{BC}}\left(\frac{9}{2},9,0\right),$$

risulta infatti:

$$\mathrm{M_{AB}M_{CD}} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}-2\right)^2+(3-9)^2+(0-4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+36+16} = \frac{\sqrt{233}}{2},$$

$$\mathrm{M_{AC}M_{BD}} = \sqrt{\left(0-\frac{13}{2}\right)^2+(6-6)^2+(0-4)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}+16} = \frac{\sqrt{233}}{2},$$

$$M_{AD}M_{BC} = \sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^2 + (3-9)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 36 * 16} = \frac{\sqrt{233}}{2}.$$

5. Il tetraedro ortocentrico presenta una caratteristica che, ancora una volta, ne ricorda un'altra tipica del triangolo.

PROPRIETÀ 4. ***In un tetraedro ortocentrico, i baricentri e gli ortocentri delle sue facce sono situati su una medesima sfera***.

- Verifichiamo questa proprietà con riferimento ad un tetraedro già preso in esame e precisamente al tetraedro di vertici (figura 6):

$$A(0,0,0),\ \ B(12,6,0),\ \ C(6,12,0),\ \ D(8,8,8).$$

Sappiamo già che gli ortocentri delle sue facce sono i punti:

$$H_A\left(\frac{96}{11},\frac{96}{11},\frac{24}{11}\right),\ \ H_B(6,9,3),\ \ H_C(9,6,3),\ \ H_D(8,8,0).$$

Troviamo le coordinate dei baricentri delle facce:

$$G_A\left(\frac{26}{3},\frac{26}{3},\frac{8}{3}\right),\ \ G_B\left(\frac{14}{3},\frac{20}{3},\frac{8}{3}\right),\ \ G_C\left(\frac{20}{3},\frac{14}{3},\frac{8}{3}\right),\ \ G_D(6,6,0).$$

Troviamo adesso l'equazione della sfera passante per i quattro baricentri. Questa equazione è del tipo seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a\,x + b\,y + c\,z + d = 0.$$

Imponendo le condizioni che passi per i baricentri suddetti, si ottengono le seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} \left(\frac{26}{3}\right)^2 + \left(\frac{26}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{26}{3}a + \frac{26}{3}b + \frac{8}{3}c + d = 0 \\ \left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}a + \frac{20}{3}b + \frac{8}{3}c + d = 0 \\ \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{20}{3}a + \frac{14}{3}b + \frac{8}{3}c + d = 0 \\ 6^2 + 6^2 + 6\,a + 6\,b + d = 0 \end{cases}$$

Una volta risolto il loro sistema, si trova:

$$a = b = -14\,,\ \ c = -4\,,\ \ d = 96\,.$$

Ne consegue che l'equazione della sfera passante per i baricentri delle facce del tetraedro è la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14\,x - 14\,y - 4\,z + 96 = 0\,.$$

A questo punto si verifica che questa equazione è soddisfatta da ciascuno degli ortocentri delle facce del tetraedro e questo è sufficiente per concludere che effettivamente gli otto punti considerati sono situati sulla medesima sfera.

- Nel caso particolare in cui il tetraedro è trirettangolo, considerato che i calcoli, pur complessi, sono tuttavia tollerabili, è possibile una dimostrazione. Accenniamo alla dimostrazione per il tetraedro già preso in esame, i cui vertici hanno le seguenti coordinate (figura 5):

$$A(a,0,0),\ \ B(0,b,0),\ \ C(0,0,c),\ \ D(0,0,0).$$

Ebbene, procedendo come sopra, dapprima si trovano le coordinate dei baricentri delle facce:

$$G_A\left(0,\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right),\ \ G_B\left(\frac{a}{3},0,\frac{c}{3}\right),\ \ G_C\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},0\right),\ \ G_D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right).$$

Quindi si trova l'equazione della sfera passante per questi punti. Essa è la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a}{3}\,x - \frac{b}{3}\,y - \frac{c}{3}\,z = 0\,.$$

Si verifica infine che la sfera trovata passa per gli ortocentri delle facce del tetraedro, che questa volta, però, sono solo due: D ed H_D .