PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO
PER IL LICEO SCIENTIFICO "L.B. ALBERTI" DI CAGLIARI

Si risolva uno dei problemi e si risponda a quattro quesiti.

Problema 1

Considera la famiglia di funzioni $f: R \to R$ definita ponendo

$$f(x)=\frac{a x^3+b x^2+c}{x^2+d},$$

dove *a, b, c, d* sono parametri reali.

1. Determina i coefficienti a, b, c, d in modo che il grafico $f(x)$ abbia per asintoti le rette di equazione x=0 e y=x-3 e abbia un punto di minimo in x=2.

2. Verificato che i valori dei coefficienti risultano a=1, b= - 3, c=4, d=0, rappresenta la curva.

3. Trova l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa x= -1.

4. Calcola l'aerea del triangolo che la retta tangente trovata al punto precedente forma con gli asintoti della funzione.

5. Determinare se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-1; 2].

Problema 2

Considera la famiglia di funzioni $f: R \to R$ definita ponendo:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-(b+3)x+2a+4 \; se \; x \leq 3 \\ a \cdot \ln(x-2) \; se \; x>3 \end{cases}$$ con *a, b, c* parametri reali.

1. Determina per quali valori dei parametri a e b le funzioni sono continue e derivabili in R.

2. Nel punto **1** hai verificato che $a=1$ e $b=2$. Rappresenta graficamente tale funzione $f(x)$, deducendo preferibilmente il grafico da quello delle funzioni elementari.

3. Ricava l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto di ascissa x=3.

4. Stabilisci se funzione derivata prima $f'(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo [2; 4].

5. Determina la regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dall'asse x nell'intervallo [0; 2].

QUESITI

1. Dimostra che se p(x) è un polinomio, allora tra 2 zeri consecutivi c'è una radice della derivata p'(x).
2. Per quale o quali valori di k la curva di equazione $y=x^3+kx^2+3x-4$ ha una sola tangente orizzontale.
3. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} kx^2-2x+1 \; se \; x<2 \\ x^2+(k-1)x-1 \; se \; x\geq 2 \end{cases}$

   determinare, se possibile, k in modo che la funzione f(x) e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.
4. Si mostri che la funzione $y=x^3+8$ soddisfa le condizioni del Teorema del valor mediosull'intervallo [-2; 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
5. Data la parabola di equazione $y=\frac{1}{2}x^2$, determinare il suo punto P più vicino al punto A(4;1).
6. Dimostrare che l'equazione $x^5+10x+1=0$ ammette una sola soluzione reale.
7. Calcolare l'integrale indefinito: $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x)^3}dx$
8. Si calcoli $\lim_{x\to\infty} 4x\cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$