Punti notevoli di un tetraedro – Parte Terza
Il tetraedro equifacciale e il tetraedro isodinamico
di Antonino Giambò

1. Completiamo la rassegna dei punti notevoli di un tetraedro occupandoci dei punti notevoli di due tetraedri particolarmente interessanti e intriganti: il *tetraedro equifacciale* e il *tetraedro isodinamico*. Mostrerò come si possano costruire e segnalerò appunto alcune interessanti proprietà relative ai loro punti notevoli.

Del primo si sono occupati Lemoine (1) in un lavoro del 1880 [4] e, in Italia, Davide Besso (2) [1]. In tempi più recenti l'argomento è stato affrontato anche da Honsberger (3) in una pubblicazione del 1976 [3] e da Paolo Gronchi in un articolo del 2005 [2].

Del secondo tetraedro si è occupato Neuberg (4) in un articolo comparso nel 1885 sulla rivista *Mathesis* [5], da lui stesso fondata con la collaborazione del matematico belga Paul Mansion (1844-1919), che ne fu anche l'editore, ma verosimilmente elaborato l'anno precedente, come risulta da un articolo di Catalan (5).

2. TETRAEDRO EQUIFACCIALE.

2.1 Un tetraedro regolare ha uguali tutte e quattro le facce, che sono esattamente triangoli equilateri, ed è ortocentrico. Come sappiamo in esso coincidono baricentro, circocentro, ortocentro e incentro.

Sennonché, senza che il tetraedro sia un tetraedro regolare, le sue facce possono essere parimenti uguali.

Un tetraedro le cui facce sono triangoli uguali si denomina ***tetraedro equifacciale*** (o anche ***isoscele***).

La costruzione di un tetraedro equifacciale può avvenire in più modi.

- Uno consiste nel prendere come vertici del tetraedro quattro vertici convenienti di un parallelepipedo rettangolo. Per esempio, i vertici H, A, C, F del parallelepipedo ABCDEFGH (figura 1). In effetti, se a, b, c sono le misure degli spigoli che convergono in uno stesso vertice (per es.: B), si costata facilmente che le misure dei lati di ciascuno dei triangoli ACF, ACH, AFH, CFH – facce del tetraedro HACD – sono le seguenti:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,,\sqrt{b^2+c^2}\,,\sqrt{c^2+a^2}\,.$$

Per cui le facce del tetraedro sono uguali fra loro e il tetraedro è perciò un tetraedro equifacciale.

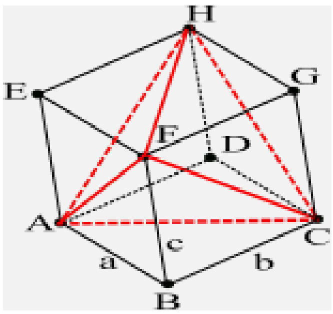

figura 1

- Mi propongo, tuttavia, di descrivere una modalità diversa, che prescinde dal parallelepipedo.

Incominciamo col prendere in esame il triangolo $D_1D_2D_3$ (figura 2) e chiamiamo A, B, C, i punti medi dei lati D_2D_3, D_3D_1, D_1D_2 rispettivamente. È noto che risulta: $AB=D_1C=CD_2$, $BC=D_3A=AD_2$, $CA=D_1B=BD_3$, per cui i quattro triangoli ABC, ABD_3, BCD_1, CAD_2 sono uguali.

---

[1] Émile M. H. Lemoine, matematico francese, 1840-1912. Egli riprende, in realtà, un articolo presente negli Annales de Mathématiques pures e appliquées tome 1 (1810-1811), p. 353-367, dal titolo *Géométrie. Mémoire sur le tétraèdre, présentant la solution de diverses questions proposées dans les Annales.*

[2] Davide Besso, matematico triestino, 1845-1906. Fu fondatore, nel 1886, e primo direttore della rivista *Periodico di Matematica*, diventato nel 1898 organo dell'associazione *Mathesis* e denominato poi, nel 1921, *Periodico di Matematiche* ad opera di Federigo Enriques. Mi piace sottolineare che il primo articolo della rivista, scritto proprio da Besso, riguarda esattamente il tetraedro a facce uguali [1].

[3] Ross Honsberger, matematico canadese, 1929-2016.

[4] Jean Baptiste Joseph Neuberg, matematico lussemburghese, 1840-1926.

[5] Eugène Charles Catalan, matematico belga, 1814-1894, *Rapport sur un mémoire sur le tétraèdre par M. Neuberg*, in Bulletins de l'Académie Royale de Sciences, del Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bruxell, 1884, vol. 7, pagg. 286-287.

Se, ripiegando i tre triangoli esterni al triangolo ABC intorno ai lati di questo triangolo, potessimo far coincidere i punti D_1, D_2, D_3 in un punto D, avremmo ottenuto il tetraedro equifacciale ABCD (figura 3).

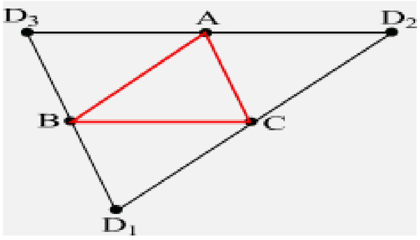

figura 2

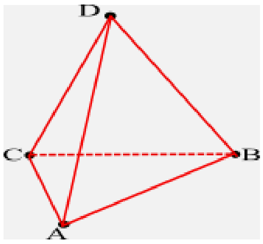

figura 3

Si pone allora il problema di stabilire sotto quale condizione i tre punti D_1, D_2, D_3 possono essere riuniti nel punto D. Ora, in virtù delle uguaglianze suddette, si capisce che il punto D, ammesso che esista, deve essere il punto di intersezione di tre sfere:

- la sfera di centro A e raggio $AD_2=AD_3$, vale a dire raggio uguale al lato BC del triangolo ABC opposto al vertice A;
- la sfera di centro B e raggio $BD_1=BD_3$, vale a dire raggio uguale al lato CA del triangolo ABC opposto al vertice B;
- la sfera di centro C e raggio $CD_1=CD_2$, vale a dire raggio uguale al lato AB del triangolo ABC opposto al vertice C.

Supponiamo a questo punto che il tetraedro (ammesso che esista) sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), tali che l'origine O coincida con C, l'asse x sia la retta CA orientata da C verso A, il triangolo ABC sia contenuto nel piano xy, l'asse z sia la perpendicolare al piano del triangolo ABC orientata in modo che il vertice D si trovi nel semispazio $z>0$.

Assodato che C ha coordinate (0, 0, 0), supponiamo che sia: A(p, 0, 0), B(q, r, 0), dove p, q, r sono numeri reali tali che $p>0$, $q\geq 0$, $r>0$.

Troviamo le equazioni delle tre sfere suddette:

- sfera di centro A e raggio BC, dopo aver calcolato che $\overline{BC}^2 = q^2 + r^2$:
$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = q^2 + r^2;$$
- sfera di centro B e raggio CA, dopo aver costatato che $\overline{CA}^2 = p^2$:
$$(x-q)^2 + (y-r)^2 + z^2 = p^2:$$
- sfera di centro C e raggio AB, dopo aver calcolato che $\overline{AB}^2 = (q-p)^2 + r^2$:
$$x^2 + y^2 + z^2 = (q-p)^2 + r^2.$$

Una volta risolto il sistema delle tre equazioni ottenute, si trovano le ipotetiche coordinate di D:

$$(1) \qquad x_D = p - q\,, \quad y_D = \frac{2\,q^2 + r^2 - 2\,p\,q}{r}\,, \quad z_D = \frac{2}{r}\sqrt{q\,(p-q)\,[r^2 - q\,(p-q)]}\,.$$

Diciamo "ipotetiche" perché, mentre non ci sono problemi per le prime due coordinate, ce ne sono invece per la terza, dal momento che non è garantito che la quantità sotto il segno di radice quadrata sia positiva. Condizione indispensabile affinché appunto sia reale il valore di z_D.

Bisogna allora distinguere varie situazioni e, per meglio individuarle, consideriamo una figura in cui sia messo in evidenza il solo triangolo ABC (figura 4), ovviamente contenuto nel piano (Oxy).

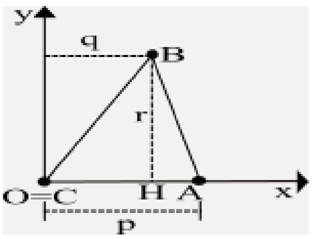

figura 4

#1. Come prima situazione prendiamo in esame tre casi particolari:

$$q = 0,\ \ p = q,\ \ r^2 - q\,(p - q) = 0.$$

In ciascuno di essi $z_D = 0$, ragione per cui non esiste alcun tetraedro che abbia vertici nei punti A, B, C, D, poiché questi punti sono complanari, appartenendo tutti al piano $z=0$.

Ora, si capisce facilmente che in tutti e tre i casi il triangolo ABC è un triangolo rettangolo, rispettivamente in C, in A o in B.

Nei primi due casi ciò è immediato. Nel terzo caso si costata che la relazione si può mettere nella forma seguente: $r^2+q^2=p\,q$, vale a dire $\overline{BC}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CH}$, che è per l'appunto una condizione affinché il triangolo sia rettangolo in B.

#2. Come seconda situazione prendiamo in esame il caso in cui sia:

$$q > p\,.$$

Costatato che, in questo caso, $r^2 - q\,(p-q) > 0$, l'espressione sotto il segno di radice, in z_D, risulta negativa e perciò z_D non è un numero reale: il tetraedro non esiste.

In questo caso è evidente che il triangolo ABC è ottusangolo e l'angolo ottuso è quello di vertice A.

#3. Consideriamo infine la situazione in cui sia:

$$q < p.$$

Ebbene, bisogna distinguere due casi, a seconda che la quantità $r^2 - q\,(p-q)$ sia positiva o negativa (Il caso che sia nulla è già stato esaminato):

- nel primo caso, vale a dire nel caso in cui risulti $r^2+q^2>p\,q$, per cui il triangolo ABC è acutangolo, z_D è un numero reale: esiste il tetraedro;
- nel secondo caso, cioè quando $r^2+q^2<p\,q$, per cui il triangolo ABC è ottusangolo (l'angolo ottuso è quello di vertice B), z_D risulta negativa e perciò z_D non è un numero reale: non esiste il tetraedro.

In conclusione, esiste il tetraedro equifacciale di vertici A, B, C tali che:

$$A(p,0,0),\ \ B(q,r,0),\ \ C(0,0,0),$$

mentre le coordinate di D sono date dalle formule (1), se e solo se il triangolo ABC è acutangolo, vale a dire se e solo se risulta:

$$q < p \quad \text{e} \quad r^2 - q\,(p - q) > 0.$$

- Si capisce che in un tetraedro equifacciale, gli spigoli opposti, cioè quegli spigoli che non hanno punti comuni, sono uguali. In particolare, nel tetraedro ABCD (figura 3) risulta: $AB=CD$, $AD=BC$, $AC=BD$.

2.2 I punti notevoli di un tetraedro equifacciale hanno una caratteristica particolare che potrebbe essere dimostrata in generale, utilizzando quanto appreso sopra. Ma, onde evitare di ingolfarci in calcoli sempre più noiosi e complicati, preferiamo, dopo aver enunciato tale proprietà, verificarla in un caso particolare.

- Prima, però, vogliamo soffermarci su due proprietà facilmente dimostrabili in generale. Ricordano analoghe proprietà del triangolo equilatero e sono espresse da due teoremi.

TEOREMA 1. *Le altezze di un tetraedro equifacciale sono uguali*.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente costatare che ogni altezza del tetraedro si ottiene dividendo il triplo del suo volume V per l'area S di una faccia. E siccome le facce sono uguali e perciò equivalenti, anche le altezze sono uguali. Ognuna di tali altezze si può definire perciò *altezza del tetraedro*.

TEOREMA 2. *Ogni punto interno di un tetraedro equifacciale è tale per cui la somma delle sue distanze dalle facce del tetraedro è uguale all'altezza del tetraedro*.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il tetraedro equifacciale ABCD, sia P un suo qualsiasi punto interno (figura 5). Congiunto P con i vertici del tetraedro, questo risulta suddiviso in quattro tetraedri aventi tutti per base un triangolo della stessa area S e per altezze le distanze – d_A, d_B, d_C, d_D – del punto P dalle facce BCD, CDA, ABD, ABC rispettivamente. Per cui, indicata con h l'altezza del tetraedro, si ha evidentemente che il suo volume V è uguale alla somma dei volumi V_A, V_B, V_C, V_D dei quattro tetraedri in cui esso è stato suddiviso, per cui risulta:

$$\frac{1}{3} S\, h = \frac{1}{3} S\, d_A + \frac{1}{3} S\, d_B + \frac{1}{3} S\, d_C + \frac{1}{3} S\, d_D$$

e perciò:

$$d_A + d_B + d_C + d_D = h\,.$$

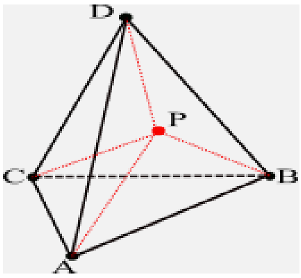

figura 5

In realtà, la proprietà vale anche se il punto P si trova sulla superficie del tetraedro. Solo che, in questo caso, le parti in cui il solido è suddiviso dalle congiungenti P con i suoi vertici si riducono ad uno solamente o a due o a tre, a seconda che rispettivamente P coincida con uno dei vertici o sia interno ad uno spigolo o sia interno ad una faccia, e parimenti si riducono a uno o a due o a tre le sue distanze dalle facce del tetraedro.

- Possiamo passare adesso alla proprietà annunciata sopra.

Com'è stato anticipato, la verificheremo per un tetraedro particolare. E precisamente per il tetraedro che corrisponde ai seguenti dati:

$$p = 10,\ \ q = 1,\ \ r = 5$$

e perciò avente le seguenti coordinate (figura 6):

$$A(10, 0, 0),\ \ B(1, 5, 0),\ \ C(0, 0, 0),\ \ D\left(9, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

Che si tratti effettivamente di un tetraedro equifacciale può essere verificato calcolando le misure dei lati delle facce e appurare che esse, per ogni faccia, sono quelle del seguente insieme: $\{\sqrt{26}, 10, \sqrt{106}\}$.

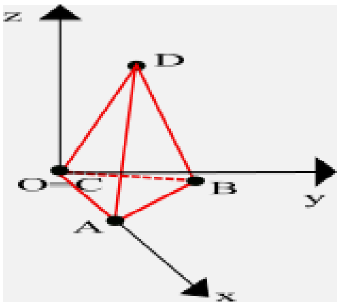

figura 6

La proprietà di cui parliamo è la seguente:

PROPRIETÀ. *In un tetraedro equifacciale coincidono il baricentro* G, *il circocentro* K, *l'incentro* I.

Come dire: *In un tetraedro equifacciale la sfera circoscritta e la sfera inscritta hanno lo stesso centro che è anche il baricentro del tetraedro*.

VERIFICA (riferita, come già detto, al tetraedro rappresentato in figura 4).

- Troviamo le coordinate del baricentro G.

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = \frac{10 + 1 + 0 + 9}{4} = 5\,, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \frac{0 + 5 + 0 + \frac{7}{5}}{4} = \frac{8}{5}\,,$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \frac{0 + 0 + 0 + \frac{24}{5}}{4} = \frac{6}{5}\,.$$

- Riguardo il circocentro K, potremmo trovare l'equazione della sfera circoscritta al tetraedro e costatare che il suo centro è esattamente G, per cui K=G. Ma, dovendo appunto verificare che K=G, basta calcolare le distanze di G dai vertici del tetraedro e costatare che sono uguali. Di fatto si ha:

$\overline{AG}^2 = (10-5)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 29;\qquad \overline{BG}^2 = (1-5)^2 + \left(5-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 29;$

$\overline{CG}^2 = 5^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 29;\qquad \overline{DG}^2 = (9-5)^2 + \left(\frac{7}{5}-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}-\frac{6}{5}\right)^2 = 29.$

- Allo stesso modo per l'incentro I, dovendo verificare che I=G, basta calcolare le distanze di G dalle facce del tetraedro e costatare che sono uguali. Ovviamente servono, in questo caso, le equazioni delle facce del tetraedro, che sono le seguenti:

$ABC \equiv z=0,\ \ ABD \equiv 60\,x+108\,y-19\,z-600=0,\ \ ACD \equiv 24\,y-7\,z=0,\ \ BCD \equiv 60\,x-12\,y-109\,z=0.$

Possiamo adesso calcolare le distanze di G da questi piani e verificare appunto che sono uguali. Di fatto:

$d(G,ABC) = z_G = \frac{6}{5};$

$d(G,ABD) = \frac{|60\,x_G + 108\,y_G - 19\,z_G - 600|}{\sqrt{60^2+108^2+19^2}} = \frac{\left|60\times 5 + 108\times\frac{8}{5} - 19\times\frac{6}{5} - 600\right|}{\sqrt{3.600+11.664+361}} = \frac{6}{5};$

$d(G,ACD) = \frac{|24\,y_G - 7\,z_G|}{\sqrt{24^2+7^2}} = \frac{\left|24\times\frac{8}{5} - 7\times\frac{6}{5}\right|}{\sqrt{576+49}} = \frac{6}{5};$

$d(G,BCD) = \frac{|60\,x_G - 12\,y_G - 109\,z_G|}{\sqrt{60^2+12^2+109^2}} = \frac{\left|60\times 5 + 108\times\frac{8}{5} - 19\times\frac{6}{5} - 600\right|}{\sqrt{3.600+144+11.881}} = \frac{6}{5}.$

- Una rapida osservazione.

Sappiamo che in un tetraedro regolare coincidono il baricentro, il circocentro, l'incentro e l'ortocentro.

Ci si potrebbe chiedere perché non abbiamo preso in considerazione l'ortocentro nel caso di un tetraedro equifacciale, in cui tuttavia coincidono, come abbiamo visto, baricentro, circocentro e incentro.

La risposta è in realtà banale. Il fatto è che, mentre un tetraedro regolare è ortocentrico, invece non lo è un generico tetraedro equifacciale.

2.3 Come il tetraedro ortocentrico, anche il tetraedro equifacciale gode di una proprietà che ne ricorda una simile riguardante il triangolo. Anzi, nel caso del tetraedro equifacciale, la proprietà assomiglia a quella del triangolo più che non la proprietà del tetraedro ortocentrico. La proprietà è la seguente.

PROPRIETÀ. *In un tetraedro equifacciale, gli ortocentri delle facce, i piedi delle altezze e i punti medi delle medesime altezze sono situati su una medesima sfera, la quale ha centro nel baricentro del tetraedro.*

Anche di questa proprietà forniamo una verifica, riferendoci allo stesso tetraedro precedente (figura 4), i cui vertici – lo ribadiamo – hanno le seguenti coordinate:

$$A(10,0,0),\ \ B(1,5,0),\ \ C(0,0,0),\ \ D\left(9,\frac{7}{5},\frac{24}{5}\right).$$

Sappiamo già che il suo baricentro G ha le seguenti coordinate:

$$G\left(5,\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right).$$

Sappiamo pure che le sue facce hanno le seguenti equazioni:

$ABC \equiv z=0,\ \ ABD \equiv 60\,x+108\,y-19\,z-600=0,\ \ ACD \equiv 24\,y-7\,z=0,\ \ BCD \equiv 60\,x-12\,y-109\,z=0.$

Bisogna trovare le coordinate degli ortocentri di queste facce e dei piedi delle altezze del tetraedro (ricordo che, trattandosi di un tetraedro non ortocentrico, i piedi delle sue altezze non coincidono con gli ortocentri delle facce opposte); bisogna trovare pure le coordinate dei punti medi di queste stesse altezze.

- Partiamo dagli ortocentri delle facce.

L'ortocentro K_A della faccia BCD è il punto in cui s'incontrano due altezze di questo triangolo, per esempio quelle relative ai lati BC e CD.

Ora, l'altezza relativa a BC giace nel piano, luogo dei punti P(x, y, z) tali che risulti: $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Avendosi $\overrightarrow{DP}\left(x-9, y-\frac{7}{5}, z-\frac{24}{5}\right)$ e $\overrightarrow{BC}(-1,-5,0)$, deve risultare: $(x-9)(-1)+\left(y-\frac{7}{5}\right)(-5)+\left(z-\frac{24}{5}\right)\cdot 0=0$, ossia: $x+5\,y-16=0$.

Parimenti, l'altezza relativa a CD giace nel piano, luogo dei punti P(x, y, z) tali che risulti: $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Avendosi $\overrightarrow{BP}(x-1, y-5, z-0)$ e $\overrightarrow{CD}\left(9,\frac{7}{5},\frac{24}{5}\right)$, deve risultare: $(x-1)\cdot 9+(y-5)\left(\frac{7}{5}\right)+(z-0)\left(\frac{24}{5}\right)=0$, ossia: $45\,x+7\,y+24\,z-80=0$.

Tenendo poi presente che le due altezze sono contenute nel piano della faccia BCD, la cui equazione abbiamo riportato sopra, le coordinate del punto K_A sono la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x+5\,y-16=0 \\ 45\,x+7\,y+24\,z-80=0 \\ 60\,x-12\,y-109\,z=0 \end{cases}$$

A conti fatti si trova il punto:

$$K_A\left(\frac{144}{125},\frac{1.856}{625},\frac{192}{625}\right).$$

Con lo stesso procedimento e con un po' di pazienza si trovano gli ortocentri delle altre facce, nell'ordine ACD, ABD, ABC:

$$K_B\left(9,\frac{63}{125},\frac{216}{125}\right),\quad K_C\left(\frac{1.106}{125},\frac{704}{625},\frac{1.728}{625}\right),\quad K_D\left(1,\frac{9}{5},0\right).$$

- Passiamo ai piedi delle altezze del tetraedro, H_A, H_B, H_C, H_D, vale a dire ai punti in cui le sue altezze, condotte rispettivamente per A, B, C, D, incontrano le facce opposte. Naturalmente servono le equazioni delle altezze.

L'altezza h_A, ovvero la perpendicolare per A al piano BCD ha le seguenti equazioni:

$$\frac{x-10}{60}=\frac{y}{-12}=\frac{z}{-109}\ ;$$

intersecandola con il piano BCD, si trova il punto H_A cercato:

$$H_A\left(\frac{962}{125},\frac{288}{625},\frac{2.616}{625}\right).$$

Allo stesso modo si trovano le coordinate dei piedi delle altre altezze:

$$H_B\left(1,\frac{49}{125},\frac{168}{125}\right),\quad H_C\left(\frac{288}{125},\frac{2.592}{625},-\frac{456}{625}\right),\quad H_D\left(9,\frac{7}{5},0\right).$$

- Le coordinate dei punti medi M_A, M_B, M_C, M_D delle altezze condotte rispettivamente per i vertici A, B, C, D, sono, a questo punto, facilmente calcolabili. Si trova:

$$M_A\left(\frac{1.106}{125},\frac{144}{625},\frac{1308}{625}\right),\quad M_B\left(1,\frac{337}{125},\frac{84}{125}\right),\quad M_C\left(\frac{144}{125},\frac{1296}{625},\frac{228}{625}\right),\quad M_D\left(9,\frac{7}{5},\frac{12}{5}\right).$$

- A questo punto possiamo procedere in più modi per verificare che i 12 punti trovati sono situati su una stessa sfera Σ di centro G, ma il più comodo, a mio giudizio, è di trovare l'equazione della sfera avente centro in G e raggio GK_D e verificare che, oltre al punto K_D, che ovviamente sta sulla sfera, anche gli altri 11 punti considerati sono situati su di essa.

Troviamo dunque l'equazione della sfera Σ. Essa è la seguente:

$$x^2+y^2+z^2-10\,x-\frac{16}{5}y-\frac{12}{5}z+\frac{288}{25}=0.$$

Ed effettivamente si verifica che passa per i punti considerati, naturalmente con un po' di pazienza e magari con il supporto di uno strumento di calcolo automatico.

3. TETRAEDRO ISODINAMICO.

3.1 Se si prende un qualsiasi tetraedro e si costruiscono i rettangoli che hanno come dimensioni due suoi spigoli opposti, si ottengono tre rettangoli. È assai improbabile che questi rettangoli siano equivalenti.

Un tetraedro, in cui ciò è tuttavia possibile, fu scoperto da Neuberg. Un tetraedro siffatto è denominato ***tetraedro isodinamico***. In esso, quindi, sono uguali i prodotti delle misure degli spigoli opposti.

- Per comprendere come possa essere costruito un tetraedro isodinamico, seguiamo questo ragionamento.

Consideriamo un insieme di 4 numeri reali positivi $\{a, b, c, d\}$ e i possibili sottoinsiemi di 3 elementi da esso estraibili: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$. Si richiede che sia soddisfatta la condizione che, in ognuno di questi ultimi insiemi, ciascun numero sia minore della somma degli altri due.

Si estraggono adesso, dall'insieme originario $\{a, b, c, d\}$, tutti i possibili insiemi di due elementi e se ne calcola il prodotto: a b, a c, a d, b c, b d, c d.

Si associano quindi i due prodotti che non hanno elementi comuni fra quelli appartenenti all'insieme originario, in questo modo:

a b | c d, a c | b d, ad | b c.

Ebbene, le tre coppie di numeri, così ottenuti, sono tali per cui il prodotto dei due numeri di ogni coppia è costante: possono essere assunte perciò come le misure degli spigoli opposti di un tetraedro isodinamico (figura 7).

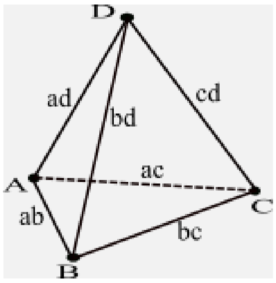

figura 7

Naturalmente è verificata l'indispensabile condizione che, in ogni triangolo, costituente una faccia del tetraedro, ciascun lato è minore della somma degli altri due.

Lo facciamo vedere per un lato, ma il ragionamento vale per tutti i lati.

Dobbiamo, dunque, far vedere che è $ab<bc+ac$.

Infatti: $ab<bc+ac$ se $ab<c(a+b)$. Ma quest'ultima relazione è vera dal momento che, essendo $c<a+b$ per le ipotesi fatte, a più forte ragione risulta $ab<(a+b)^2$. Relazione indubbiamente vera.

3.2 Il tetraedro isodinamico gode della interessante proprietà espressa dal seguente teorema.

TEOREMA. *In un tetraedro isodinamico le congiungenti ciascun vertice con il centro del cerchio inscritto nella faccia opposta passano per uno stesso punto*.

Al fine di alleggerire il procedimento, che comunque rimane lungo e laborioso, ci limiteremo a verificare questo teorema in un caso particolare. Precisamente, a partire dall'insieme $\{5, 6, 8, 10\}$, dopo aver controllato che, per ogni sua terna, ciascuno dei tre valori è minore della somma degli altri due, consideriamo le seguenti coppie di prodotti:

$5 \cdot 6 \mid 8 \cdot 10$, $5 \cdot 8 \mid 6 \cdot 10$, $5 \cdot 10 \mid 6 \cdot 8$, vale a dire: $30 \mid 80$, $40 \mid 60$, $50 \mid 48$.

Appurato che i prodotti dei numeri di ogni coppia sono uguali a 2.400, assumiamo queste coppie di numeri come misure degli spigoli opposti del tetraedro ABCD, che chiaramente è un tetraedro isodinamico, nel modo seguente: $\overline{AB} = 40$, $\overline{CD} = 60$, $\overline{BC} = 30$, $\overline{AD} = 80$, $\overline{AC} = 50$, $\overline{BD} = 48$.

Riferiamo adesso il tetraedro ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz). Precisamente, l'origine O si fa coincidere con A, l'asse x con la retta AB, orientata da A verso B, l'asse y orientato in modo che C abbia ordinata positiva e l'asse z orientato in modo che D abbia positiva la terza coordinata (figura 8).

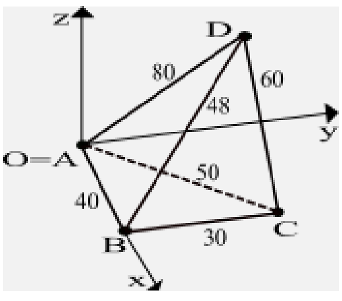

figura 8

Bisogna trovare le coordinate dei vertici del tetraedro. Ora, per i punti A, B, C non ci sono difficoltà. Si ha infatti:

$$A(0,0,0),\ \ B(40,0,0),\ \ C(40,30,0).$$

Qualche difficoltà insorge per le coordinate di D.

Per questa ricerca indichiamo queste coordinate con (x, y, z). Tenendo allora presente che:

$$\overline{AD}^2 = 6.400,\ \ \overline{BD}^2 = 2.304,\ \ \overline{CD}^2 = 3.600,$$

e inoltre:

$$\overline{AD}^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \ \overline{BD}^2 = (x-40)^2 + y^2 + z^2,\ \ \overline{CD}^2 = (x-40)^2 + (y-30)^2 + z^2,$$

si ottengono le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6.400,\ \ (x-40)^2 + y^2 + z^2 = 2304,\ \ (x-40)^2 + (y-30)^2 + z^2 = 3.600.$$

Una volta risolto il loro sistema, si trovano le coordinate di D:

$$D\left(\frac{356}{5}, -\frac{33}{5}, 3\sqrt{143}\right).$$

Andiamo a determinare adesso gli incentri delle facce del tetraedro, vale a dire i centri dei cerchi inscritti in esse. Li troveremo intersecando, per ogni faccia, due idonee bisettrici interne e troveremo le equazioni di queste bisettrici ricorrendo ad una loro proprietà fondamentale, che è quella di dividere il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

- Incominciamo con l'incentro J_D della faccia ABC.

Considerata la bisettrice dell'angolo in A, sia P il punto in cui essa interseca il lato BC. Per la proprietà su accennata, si ha:

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC}\ \ \text{ossia}\ \ \overline{BP} : \left(\overline{BP}+\overline{PC}\right) = 40 : (40+50)\ \ \text{da cui segue}\ \ \overrightarrow{BP} = \frac{4}{9}\,\overrightarrow{BC}.$$

Indicate pertanto con (x, y, 0) le coordinate di P, risulta:

$$x - 40 = \frac{4}{9}\,(40-40),\ \ y - 0 = \frac{4}{9}\,(30-0);\ \ \text{e da qui:}\ \ x = 40,\ \ y = \frac{40}{3}.$$

Le coordinate di P sono dunque le seguenti: $P\left(40, \frac{40}{3}, 0\right)$. Possiamo adesso trovare l'equazione della bisettrice interna b_A della faccia ABC uscente da A:

$$b_A \equiv (x - 3y = 0,\ \ z = 0).$$

Consideriamo ora la bisettrice dell'angolo in B e sia Q il punto in cui essa interseca il lato AC. Si ha:

$$\overline{AQ} : \overline{QC} = \overline{AB} : \overline{BC}\ \ \text{ossia}\ \ \overline{AQ} : \left(\overline{AQ} + \overline{QC}\right) = 40 : (40+30)\ \ \text{da cui segue}\ \ \overrightarrow{AQ} = \frac{4}{7}\,\overrightarrow{AC}.$$

Indicate ora con (x,y,0) le coordinate di Q, risulta:

$$x - 0 = \frac{4}{7}\,(40-0),\ \ y - 0 = \frac{4}{7}\,(30-0)\ \ \text{e da qui:}\ \ x = \frac{160}{7},\ \ y = \frac{120}{7}.$$

Le coordinate di Q sono perciò le seguenti: $Q\left(\frac{160}{7}, \frac{120}{7}, 0\right)$.

Possiamo così trovare l'equazione della bisettrice interna b_B della faccia ABC uscente da B:

$$b_B \equiv (x + y - 40 = 0,\ \ z = 0).$$

L'incentro I_D della faccia ABC è l'intersezione delle due bisettrici b_A e b_B. Le sue coordinate si ottengono risolvendo il sistema delle equazioni delle due rette. Si trova precisamente:

$$J_D(30, 10, 0).$$

- Ripetendo il precedente procedimento sulle facce ABD, ACD, BCD, si trovano le coordinate degli incentri di queste facce, precisamente:

$$J_C\left(36, -\frac{11}{7}, \frac{5\sqrt{143}}{7}\right),\ \ J_B\left(\frac{676}{19}, \frac{207}{19}, \frac{15}{19}\sqrt{143}\right),\ \ J_A\left(\frac{1.076}{23}, \frac{207}{23}, \frac{15}{23}\sqrt{143}\right).$$

Giunti a questo punto, possiamo trovare le equazioni delle congiungenti ogni vertice del tetraedro con l'incentro della faccia opposta. Otteniamo:

$$AJ_A \equiv \left(\frac{x}{\frac{1076}{23}} = \frac{y}{\frac{207}{23}} = \frac{z}{\frac{15}{23}\sqrt{143}}\right) \quad \text{o meglio} \quad \left(\frac{x}{1.076} = \frac{y}{207} = \frac{z}{15\sqrt{143}}\right),$$

$$BJ_B \equiv \left(\frac{x-40}{\frac{676}{19}-40} = \frac{y}{\frac{207}{19}} = \frac{z}{\frac{15}{19}\sqrt{143}}\right) \quad \text{o meglio} \quad \left(\frac{x-40}{-84} = \frac{y}{207} = \frac{z}{15\sqrt{143}}\right),$$

$$CJ_C \equiv \left(\frac{x-40}{36-40} = \frac{y-30}{-\frac{11}{7}-30} = \frac{z-0}{5\sqrt{143}-0}\right) \quad \text{o meglio:} \quad \frac{x-40}{-28} = \frac{y-30}{-221} = \frac{z}{5\sqrt{143}}.$$

$$DJ_D \equiv \left(\frac{x-30}{\frac{356}{5}-30} = \frac{y-10}{-\frac{33}{5}-10} = \frac{z-0}{3\sqrt{143}-0}\right) \quad \text{o meglio:} \quad \frac{x-30}{206} = \frac{y-10}{-83} = \frac{z}{15\sqrt{143}}.$$

Risolviamo il sistema delle equazioni di due di esse, per esempio le ultime due, CJ_C e DJ_D per trovare la loro intersezione X e verifichiamo che le coordinate di X soddisfano anche le equazioni delle altre due congiungenti.

Risolviamo allora il sistema seguente:

$$\begin{cases} \frac{x-40}{-28} = \frac{y-30}{-221} \\ \frac{x-40}{-28} = \frac{z}{5\sqrt{143}} \\ \frac{x-30}{206} = \frac{y-10}{-83} \end{cases} \quad \text{e troviamo} \quad X\left(\frac{1.076}{29}, \frac{207}{29}, \frac{15\sqrt{143}}{29}\right).$$

Si verifica adesso che le coordinate di X soddisfano effettivamente anche alle equazioni delle altre congiungenti AJ_A e BJ_B.

Resta così verificato che convergono in uno stesso punto le congiungenti i vertici del tetraedro isodinamico con i centri dei cerchi inscritti nelle facce opposte.

3.3. Una chiosa per concludere.

Di norma, un tetraedro isodinamico non è ortocentrico né equifacciale. Esiste tuttavia un tetraedro che è, nel medesimo tempo, isodinamico-ortocentrico-equifacciale ed è chiaramente il tetraedro regolare.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. Besso, *Sul tetraedro a facce uguali*, in Periodico di Matematica, N° 1/1886, pagg. 1-12.

[2] P. Gronchi, *Un tetraedro … isoscele*, in Archimede, N° 1/2005, pagg. 3-8.

[3] R. Honsberger, *A Theorem of Bang and the Isosceles Tetraedron*, in Mathematical Gems II, cap. 9, Washington, Math. Assoc. Amer., 1976.

[4] É. Lemoine, *Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes apposées sont égales deux a deux, et solution de la question* 1272. Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Tome 19 (1880) p. 133-138

[5] J.B.J. Neuberg, *Mémpoire sur le tetraèdre*, Supplement to *Mathesis*, N° 5/1885.