Educazione matematica e cultura

di Mauro Laeng

DAGLI ATTI DEL CONVEGNO MATHESIS DI MONOPOLI, 1981

….. il mio compito oggi è…. : quello di parlare del ruolo formativo della matematica: quel ruolo che a parole nessuno sembra contestare, ma che in pratica nella vita quotidiana della scuola incontra invece tanto spesso una crisi di rigetto come materia «ostica», o quella che non saprei se più pericolosa della indifferenza, per cui la matematica sarebbe «incolore» e così rarefatta da essere addirittura trasparente e invisibile. In luogo del rigetto e dell'indifferenza, la pedagogia della matematica si chiede se sia possibile sostituirvi l'accettazione e l'interesse.

Comincerei col dire che la matematica rappresenta, per i ragazzi e per gli stessi adulti, il prolungamento e la raffinazione di processi naturali: quelli delle *azioni,* e delle rappresentazioni delle azioni, quelle che il Piaget chiama *operazioni.* C'è anzitutto una logica delle cose, e con esse degli organi biologici, che presiede al nostro rapporto col mondo esterno, ai nostri movimenti: essa pone già le prime premesse a quella che sarà poi un'approfondita riflessione e astrazione. Così il piccino che ha problemi di controllo del proprio assetto organico nei rapporti con l'ambiente esterno, già manifesta alcune di queste logiche dell'azione, come ad esempio quella del superare una barriera, che è una sorta di esperienza diretta e immediata di tipo topologico; e poi molte altre come quelle del tirare, dello spingere, che sono alla base delle traslazioni; quelle del sollevare e dell'abbassare, che sono alla base dei ribaltamenti; e quella delle rotazioni, quando il bimbetto trascina un oggetto attorno ad un suo punto di resistenza e produce un moto che in tal caso è vincolato a un punto sul piano. Questa logica delle cose e degli organi viene esperita fin dai primi mesi di vita e costituisce le infrastrutture sulle quali le esperienze successive nel corso dei primi anni porteranno alla costruzione dell'oggetto e della sua permanenza e alla costruzione dei primi rapporti fondamentali di spazio e di tempo. La logica delle azioni trova a poco a poco la sua graduale prosecuzione nella logica delle operazioni: queste non sono sostanzialmente diverse dalle azioni, se si pensa che in prima istanza le operazioni non sono altro che azioni rappresentate. È importante sottolineare (e Piaget lo fa con energia, ma non tutti coloro che lo ripetono se ne rendono perfettamente conto) che la genesi della scienza (o l'epistemologia genetica, per questo autore) che si svolge attraverso una sequenza di livelli o di stadi non corrisponde tanto all'acquisizione di forme generali degli oggetti e delle loro relazioni, quanto all'acquisizione e via via al sempre più chiaro possesso di *forme generali di coordinamento* delle azioni sugli oggetti.

In altre parole, la prima forma di riflessione astrattiva è già operatoria; ognuno vede come si rimuovano in tal modo grossi ostacoli che nascerebbero da fraintendimenti.

L'interpretazione che Piaget ha dato della sequenza di livelli e di stadi attraverso i quali si viene costruendo la sintesi delle conoscenze, tien conto secondo l'autore di un alternarsi di spinte e controspinte che determinano delle situazioni di perturbazione; la rappresentazione del mondo che il bambino va costruendo presenta a tratti delle discontinuità, o addirittura dei contrasti e delle contraddizioni; l'esistenza di questi squilibri conduce all'attiva ricerca di forme generali di coordinamento che siano in grado di raggiungere l'e*quilibrio.* Quando quest'ultimo è raggiunto, coincide con la conquista di una *struttura:* cioè di una forma che coordina i rapporti con un carattere di autostabilità. L'esperienza interiore del raggiunto equilibrio corrisponde al punto d'incontro fra lo sforzo di *assimilazione* del mondo ai propri schemi mentali e lo sforzo di *accomodazione* di questi al mondo: che nella struttura trova la sua espressione.

Ma non appena il passaggio ad esperienze più varie e complesse mette in crisi l'equilibrio, la stessa struttura si manifesta insufficiente a contenere in sé determinate ulteriori operazioni. Chiunque ha dimestichezza con la storia della matematica, sa che molte volte il progresso di questa scienza è stato dovuto alla necessità di inventare nuovi enti di ragione per far sì che nel nuovo spazio così costruito fossero possibili operazioni che non lo erano nelle strutture di un livello inferiore o più circoscritto. Ora, questa che è un'esperienza registrata nella storia della matematica, è altresì esperienza registrata nella biografia individuale di ciascuno di noi. Quando abbiamo costruito la nostra prima immagine del mondo ci siamo forse illusi di aver acquisito una completa pacificazione fra lo sforzo centripeto di assimilazione e quello centrifugo di accomodazione, finché ci siamo accorti che fatti nuovi rompevano questa bella armonia e ci costringevano a inventare strutture di livello più elevato e più potente.

Questa spiegazione data dal Piaget è largamente accettata dalla massima parte degli studiosi, anche se non è completamente esente da qualche critica. Secondo alcuni, fra i quali mi metto, è senz'altro vero che la ricerca dell'equilibrio è sospinta e risospinta verso livelli di equilibrio via via più avanzati; ma che essa segua un itinerario in larga misura eguale per tutti (accelerabile o ritardabile, magari, ma non diverso nella sua sequenza) è però contestato; si può piuttosto ritenere che alcune di queste strutture guadagnate nel processo epistemologico genetico possano esser guadagnate in pari tempo con altre compresenti e coesistenti e non solo successive. Che la matematica sia la prima riflessione astrattiva sui concetti naturali di azione sulle cose e di rappresentazione delle possibili operazioni è comunque posizione condivisa anche da studiosi che non si sono occupati di come pensino i bambini: per esempio da parte di coloro che chiamano la matematica la «fisica dell'oggetto qualsiasi». Enriques considerava la geometria come una sorta di «protofisica»; ed è interessante rammentare come l'algebra fosse chiamata dai primi algebristi «l'arte della cosa», e in alcuni trattati fosse pertanto detta «arte cossica»; solo nel 1562 con Raffaele Bombelli al termine generico di cosa si comincia a sostituire quello di «tanto». Se questa può essere una suggestiva interpretazione, è chiaro che il significato dipende tutto da quel «qualsiasi». Tutta la generalità e potenza de discorso astratto sull'oggetto «pensabile» dipende infatti dalla capacità di prescindere dalle caratteristiche fisiche concrete che il discorso matematico come tale non potrebbe accettare. La conquista di generalità e potenza del discorso sul «qualsiasi» avviene col passaggio dal descrittivo all'esplicativo, dal «che» al «perché»: ossia da una conoscenza parziale ed esteriore ad una conoscenza totale ed interiore. D'altra parte, quella conoscenza parziale ed esteriore è anche la conoscenza ricca, policroma, compartecipata del «vissuto» esistenziale, mentre la conoscenza totale ed interiore è tale solo per alcuni aspetti. Per conseguire la profondità, dobbiamo pagare il prezzo di una rinuncia: ma con questa rinuncia guadagniamo però l'enorme vantaggio di poter andare, per gli aspetti considerati, ad una conoscenza esauriente anche se circoscritta.

Allora appare con maggiore chiarezza la differenza (che nella pedagogia e didattica della matematica ha grande importanza) fra i *processi psicologici,* che sono una cosa, e le *relazioni logiche,* che sono un'altra cosa. I processi psicologici sono temporali e graduati, rappresentano la conoscenza imperfetta ma perfettibile di un soggetto che va a poco a poco approssimandosi dalla descrizione esteriore ad una esplicazione per risoluzione completa. Le relazioni logiche invece, quelle che sono inerenti alla oggettività in sé del pensato, sono atemporali, simultanee, coesistenti in una sorta di «ucronìa» e di «utopia», cioè al di fuori del tempo e al di fuori di ogni luogo, che Platone, in difetto di meglio, attraverso il velo del mito esprimeva come l'«iperuranio» (e attraverso il mito egli faceva pure dell'ironia e della polemica; alla domanda «dove sono le essenze perfette?» rispondeva infatti che non sono sulla terra né nel cielo, ma nel «sopracielo»). Questa risposta, a prescindere da ogni ulteriore dibattito sul platonismo o non platonismo in matematica, significa che se non altro le relazioni logiche sono al di fuori del tempo e dello spazio sensibili, mentre i processi mentali che costituiscono la faticosa conquista «dialettica» della verità sono un lungo cammino che si percorre a poco a poco, confrontando tesi e antitesi, e che non è mai completamente compiuto.

Ora, per tutte le considerazioni fatte, pare evidente come la matematica si ponga come una forma di *linguaggio.* Se l'uomo, nel tentativo di dominare il mondo, non si limita ad agire su di esso, ma se lo rappresenta e così facendo si risparmia azioni avventate o pericolose, egli tende a trasferire appena può i « fatti » in « enunciati », ed a porre in corrispondenza relazioni fra fatti e relazioni fra enunciati. La rappresentazione del mondo si fa linguaggio. Non a caso un precursore degli epistomologi, un abate settecentesco, il Condillac, diceva che «ogni scienza è una lingua ben fatta». E credo che di lingue ben fatte ce ne siano poche come la matematica: una delle lingue certamente più esigenti, più rigorose. Ma quando parliamo di linguaggio, sottintendiamo sempre la presenza di un lessico, che definisce i termini, e di una sintassi, che ne dà le regole di combinazione. Anche la matematica, come linguaggio rigoroso e coerente, ha il suo lessico, che sono le definizioni, ed ha la sua sintassi, che sono le regole di trasformazione che permettono di passare dalle definizioni attraverso gli assiomi a tutte le proposizioni «bene formate» ossia accettabili secondo le regole del sistema. Se ogni linguaggio è dunque un possibile modello del mondo, la matematica fornisce lo schema a molti di tali modelli; e dà un contributo essenziale a quello che è il fine pragmatico di ogni linguaggio (cioè esprimere, attraverso enunciati e rapporti fra enunciati, i fatti e i rapporti fra i fatti), aiutandoci a «capire un problema» ed a «cogliere l'essenziale». Un proverbio popolare dice che un problema ben impostato è mezzo risolto; ora la matematica comincia con l'insegnare, come diceva G. Galilei, a «diffalcare gli impedimenti della materia», ossia a cogliere quel che nel problema è rilevante; qualcosa deve «cadere» al di sotto della soglia di pertinenza, deve essere eliminato; qualcosa invece dev'essere messo a fuoco, esser fatto oggetto di attenzione mirata, al punto da diventare l'unico oggetto, quello che è appunto contenuto ed esaurito nella nostra definizione. Di qui la a povertà », che è poi estrema ricchezza, del discorso della matematica. Esso insegna anche a cogliere l'essenziale nel senso, non poi tanto remoto dal discorso corrente, di fondamentale: e dà infatti un nuovo concetto di quel che si ha da intendere per fondazione.

A questo punto chiederci se il metodo matematico sia analitico o sintetico, deduttivo o induttivo, potrebbe essere ozioso: a parte il fatto che questi termini son spesso usati in maniera vaga e indeterminata, o contrastante da una scuola di pensiero all'altra, anche se accettassimo qualcuna delle definizioni più diffuse, i matematici potrebbero dirci che la loro disciplina è l'una e l'altra cosa. *In Science e mèthode* Poincaré escludeva che la matematica fosse solo un discorso analitico come aveva detto Hume, o solo un discorso sintetico come aveva detto Kant; i matematici si sono serviti sempre di tutti i mezzi che il pensiero poneva a loro disposizione. Piuttosto direi che va sottolineato un altro aspetto: quello per il quale il metodo matematico, non meno e forse più di altri, è legato alla capacità fondamentale di andare «al di là dell'informazione data.

Un aspetto contraddittorio con questa affermazione può sembrare quello già fatto notare, che la forza della matematica consiste nei rinunciare ad alcune informazioni per circoscriverne altre quale oggetto della propria definizione e farne la base esclusiva del proprio discorso ben connesso. Ma se così fosse, potremmo fare della matematica (come forse hanno pensato alcuni assiomatizzatori) unicamente come un immenso sistema di tautologie. In realtà, la qualità del matematico inventivo, creativo, che fa progredire la sua scienza, è invece in grande misura quella di andare al di là dell'informazione data; basti dire che fare matematica vuoi dire soprattutto aver la capacità di « fingersi » in senso positivo e costruttivo, «nuovi mondi

Mi limito ad alcuni esempi ovvi nella cultura matematica scolastica. Quando pensiamo alla convergenza delle serie di poligoni inscritti e circoscritti verso la circonferenza che ne è il limite di separazione, in realtà per fare l'ultimo « salto », per passare al limite, abbiamo bisogno di andare al di là del. l'informazione data, e di fare una sorta di « pari » (in francese), cioè una specie di « scommessa » pascaliana, correndo un rischio, che poi verificherò. Oppure pensiamo alla creazione di nuovi insiemi di numeri dopo i naturali, quando ci accorgiamo che nel loro ambito certe operazioni sono impossibili, e passiamo ai numeri relativi; e così via; di passaggio in passaggio, si compie la « lunga marcia » verso i numeri reali, e oltre. In tutti questi casi, il matematico non è soltanto colui che sa dedurre a f il di logica dalle proprie premesse, ma sempre anche colui che sa inventare. Ora, questo si rifà al metodo del pensare in generale, e non solo del pensare matematico: cioè a quello che molti chiamano il pensiero *ipotetico-deduttivo.* In sostanza il pensiero umano di fronte al mondo non solo cerca, come abbiamo detto, di tradurre i fatti e i rapporti fra i fatti, in enunciati e rapporti fra gli enunciati: ma cerca altresì di costituire, di creare una rete, al quale andare a confrontare gli enunciati e i rapporti fra enunciati in corrispondenza più o meno indovinata coi fatti. Quando queste costruzioni fittizie, queste congetture vengono prodotte, in maniera bene fondata, esse ci schiudono grandi possibilità. Una è quella di esplorare le derivazioni complete di queste costruzioni fittizie: è la via regia della matematica. L'altra si limita invece a controllare soltanto quelle conseguenze che siano come si suoi dire «interpretate», ossia modellisticamente esemplificate, che hanno riscontro nella realtà fisica. Quando per esempio Newton inventa un nuovo mezzo matematico potente per esprimere fatti che la matematica a lui antecedente non era capace di interpretare, e valendosi in questo mezzo nuovo cerca di fornire un'interpretazione più soddisfacente della gravitazione, egli fornisce un modello (anche se Newton vuol rimuovere da sé il sospetto di fingere « entità » alla maniera degli scolastici) che è in buon rapporto con i fatti.

Oggi la critica della scienza ci ha insegnato a diffidare dell'atteggiamento trionfalistico di chi, dopo aver abbozzato un'ipotesi e averne detto a fil di logica alcune conseguenze, constata che alcuni fatti sono in accordo con esse, e s'affretta a proclamare di aver «verificato» la sua ipotesi. Oggi la critica della scienza molto più accorta e molto più prudente si limiterebbe all'affermazione che l'ipotesi è stata riscontrata « compatibile » coi fatti; potrebbe darsi che altri modelli, altri schemi, altri quadri di riferimento fossero ugualmente compatibili; e di fatto ciò accade abbastanza spesso; qualora poi delle eccezioni si presentassero, dovrei comunque scegliere un modello almeno in parte diverso che ne sapesse dar conto, ovvero che fosse « più » compatibile del primo. Questo processo da minore a maggiore compatibilità costituisce il progresso stesso della scienza, È un fatto secondario che esso venga chiamato verificazione o falsificazione, purché sia messo in chiaro questo punto (sulle parole è facile contendere all'infinito, non sempre in modo produttivo).

Un'altra considerazione che non è da tralasciare, per i suoi aspetti pedagogici, è che nel pensare ipotetico-deduttivo sono presenti contemporaneamente due aspetti fondamentali: quello che direi della più sovrana *libertà,* accanto a quello della più adamantina *necessità.* Anzitutto quello della libertà; non v'è dubbio che il pensante che cerca di interpretare il mondo creando nuovi quadri di riferimento nel regno del possibile, non ha alcun limite dell'invenzione, che non sia quello insito nell'invenzione stessa. Qualcuno ha inventato i quaternioni, o il calcolo differenziale assoluto, quando nessuno sapeva a che cosa potessero servire al di fuori del gioco mentale, con sovrana libertà. Possiamo inventare il gioco della dama, il gioco degli scacchi, codificarne le regole; ho assistito ad alcune partite fra grandi maestri internazionali di scacchi che ad un certo momento decidevano di giocare modificando alcune convenzioni (una delle più interessanti è quella che modifica il movimento della regina, che non unisce più quelli della torre e dell'alfiere, bensì si muove solo su quattro caselle diagonali saltando quelle più vicine; è un vecchio schema di gioco persiano); in tal modo essi ponevano per es. vincoli più forti, e di colpo rendevano possibile un nuovo gioco, magari più interessante. Ogni volta che ci comportiamo così, noi facciamo scomparire miliardi di miliardi di partite possibili, ma ne facciamo nascere altri miliardi di miliardi. Giorni fa, un fisico che studia i neutrini mi diceva: se abbiamo alcune particelle elementari a lunga vita e non altre, abbiamo anche certi atomi e non altri, certe stelle e non altre, certe galassie e non altre. La libertà consiste nel porre le condizioni iniziali: poi, il resto segue con assoluta necessità. Anche un filosofo materialista del secolo scorso, l'Ardigò, ebbe a dire un giorno che lo stesso caso sceglie sempre uno fra gli infiniti ordini possibili.

Le proprietà del pensare in generale si riscontrano dunque nella matematica in maniera particolarmente lucida. Ma a questo punto ci chiediamo: esistono nel pensare alcuni processi primitivi, che possano anche nell'insegnamento della matematica essere aiutati a svilupparsi? Un processo certamente fondamentale è quello che porta a riconoscere la identità o la diversità: questo consente anche la generalizzazione o la discriminazione, che sono processi fondamentali per l'apprendimento e la costruzione dell'esperienza. Nella didattica elementare adoperiamo per questo i materiali strutturati; ma non dobbiamo dimenticare che in maniera del tutto naturale e spontanea da processi simili dipende semplicemente la nostra sopravvivenza biologica e l'intera evoluzione dei viventi. Qualcuno ha proposto (come in un bel libretto scritto con alcuni colleghi B. D'Amore) di cominciare a presentare fin dalla scuola materna i connettivi logici *(e, o, non)* che rendon possibili le operazioni di completamentazione, intersezione, unione. Come hanno dimostrato altri colleghi (fra i quali da anni A. Pescarini), alle origini, l'insegnamento della matematica elementare non si distingue da quello del linguaggio.

Altri processi sono legati a questi primitivi di confronto, come quelli che permettono di esprimere *tanti, quanti; più, meno; avanza, rimane, resto;* corrispondenza *uno ad uno* fra elementi di più insiemi; ed altri ancora più promettenti per le conseguenze logiche che ne derivano come certi quantificatori: *nessuno, uno, qualcuno, tutti;* il loro corretto uso elimina fra l'altro i più frequenti malintesi, e sono accessibili nella scuola elementare e nella scuola media. La distinzione di fondo rimane comunque quella fra reale e possibile. Forse anch'essa risale ad un processo primitivo, che qualcuno ha cercato nell'opporsi dell'affermazione e della *negazione;* dal punto di vista psicologico esse sono la constatazione di una presenza o di un'assenza; ma l'esperienza della successione presenza-assenza o assenza-presenza coincide con la rivelazione del *divenire.* Il gioco infantile « non c'è più », oppure « c'é ancora » è accompagnato da un moto di sorpresa, che ci dice trattarsi di autentica scoperta; uno dei giochi che piacciono di più al bambini è la ricerca dell'oggetto nascosto (se ne trae addirittura un test di livello mentale) e più tardi del rimpiattino, o della caccia al tesoro, tutti collegati allo schema del ritrovamento.

L'esperienza primitiva della presenza o assenza introduce al divario fra il *reale* e il *possibile.* Il possibile è infatti quello che non c'è ma ci potrebbe essere. Si collegano a queste altre successive distinzioni più sottili, che è bene mettere in luce più tardi, poiché (per es. nella scuola secondaria) sono in relazione col pensiero filosofico, come le forme del giudizio modale. Esse fanno perno sulla modalità *assertoria* (è oppure non è) per andare da un lato verso la modalità *problematica* (è ma potrebbe non essere, non è ma potrebbe essere) e da un altro lato verso la modalità *apodittica* (è e non può non essere, non è e non può essere). Questo discorso è collegato con quello delle condizioni necessarie e sufficienti.

Tutto sommato, credo di poter dire che la matematica presente nella cultura scolastica dev'essere ritenuta prima di tutto un linguaggio valido per sé, e perciò valido anche a tutte le età, ma attraverso una conquista progressiva, partendo dal multi-concreto (come dice Z. Dienes), dalla molteplicità capace di più significati, verso la scoperta di una trama sottostante. Galilei amava dire che il mondo è scritto in un linguaggio fatto di cerchi, triangoli e altre figure. È l'approdo ai lidi di una intelligenza perfetta, anche se circoscritta, perché assolutamente necessaria. Torno ad uno dei miei pensieri preferiti; l'illusione platonica (o forse, più quella di certi discepoli che del maestro) non fu quella di credere che le idee perfette dovessero esistere in qualche « posto »; altrimenti avrebbe avuto ragione quel professore napoletano di cui parlava B. Croce, che per farsi capire dai ragazzi diceva che le idee erano come « i caciocavalli appesi »; tale illusione o metafora immaginosa è solo un espediente mitico di per sé non necessario, come a stretto rigore non è necessaria la preesistenza degli oggetti pensati. Ciò che importa è invece che tali oggetti, magari costruiti, posti in essere dal nostro pensiero per la prima volta, tosto che non creati son definitivi; anche se l'oggetto pensato nasce da un atto di libertà, di invenzione, ha però in se stesso tutte le condizioni che vincolano in maniera perentoria, rigorosa tutte le conseguenze che ne derivano.

Ecco allora l'educazione disinteressata; ma le conoscenze *efficaci* che costituiscono le scienze applicate, o almeno orientate, non sono altro che « alcune » fra le conoscenze *pure;* come le « verità di fatto w, diceva Leibniz, sono soltanto alcune fra le « verità di ragione »». Allora, la presenza della matematica nei programmi scolastici non può essere solo un portato della tradizione per un verso, o una risposta alle esigenze della civiltà scientifico-tecnologica per un altro verso; è invece una necessità organica essenziale allo sviluppo del pensiero e quindi dell'uomo in quanto pensante. A suo tempo ci siamo molto allarmati che il rischio della « evaporazione » avesse contagiato alcuni progetti di riforma della scuola secondaria, in cui l'indi rizzo a prevalenza matematica era scomparso, a beneficio di espressioni generiche in cui la matematica era resa mero strumento, con un passo indietro verso la matematica dei contabili e degli agrimensori; ciò si collegava ad analoga proposta di liquidazione della filosofia, squagliata entro una generica dizione di «scienze umane».

Io sono convinto che la matematica e la filosofia possono dare il massimo del loro contributo alle altre scienze, fisiche o umane, solo a patto di esser coltivate anzitutto come autentica matematica e autentica filosofia. Ogni collegamento è certamente utile, anzi prezioso, ma non dev'essere scambiato per il nocciolo della questione. L'importanza del pensare per schemi, per modelli, per codici, è anche un modo di realizzare l'educazione matematica; per esempio la diffusione crescente di procedure informatiche, o dell'approccio « sistemico » allo studio di molte classi di problemi è anch'essa una spinta allo sviluppo del pensiero matematico. Però la matematica può dare il meglio di sé alla cultura solo se è motivata e capita. *Motivata,* vuoi dire collegata a tutti gli altri aspetti del pensiero e dell'azione; *capita,* vuoi dire compresa, gustata, intesa anche e sopra tutto in sé.