La struttura di gruppo
di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo (*Strutture algebriche "rare"*) ho fatto appena un cenno alla struttura di gruppo. Siccome giudico che l'argomento è particolarmente interessante, qui lo riprendo per un approfondimento.

Intendo soffermarmi tra l'altro sui gruppi di trasformazioni geometriche e, in particolare, sui movimenti che mutano un poligono regolare in se stesso.

Per prima cosa, però, ritengo doveroso riprendere la definizione di gruppo.

Un **gruppo** è costituito da un insieme di elementi G e da un'operazione "$*$", che soddisfi ai seguenti assiomi:

- G è *chiuso* rispetto all'operazione, vale a dire che, comunque si prendano due elementi a, b, appartenenti a G, anche $a * b$ appartiene a G; dunque un gruppo è una struttura algebrica $(G, *)$;
- l'operazione è *associativa*; vale a dire che, presi tre elementi qualunque a, b, c, appartenenti a G, risulta:
$$(a * b) * c = a * (b * c)\ ;$$
- l'insieme è dotato di *elemento neutro* rispetto all'operazione del gruppo; vale a dire che esiste in G un elemento u tale che, per ogni a, preso in G, risulta:
$$a * u = u * a = a\ ;$$
- ogni elemento di G ammette il *simmetrico* (o *inverso*) rispetto all'operazione del gruppo; vale a dire che, qualunque sia $a \in G$, esiste in G un elemento a' tale che, essendo u l'elemento neutro di G, risulti:
$$a * a' = a' * a = u\ .$$

Il gruppo si dice poi *commutativo* (o *abeliano*) se la sua operazione è commutativa, ossia se, comunque si prendano due elementi a, b in G, risulta:
$$a * b = b * a\ .$$

Può capitare che una parte propria S di G sia a sua volta un gruppo rispetto alla stessa operazione considerata in G. Ebbene, in tal caso S si definisce **sottogruppo** di G.

Per esempio, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha la struttura di gruppo rispetto all'ordinaria addizione ed anche l'insieme $\mathbb{Z}$ ha la struttura di gruppo rispetto alla stessa operazione e siccome $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, allora l'insieme $\mathbb{Z}$ è un *sottogruppo* di $\mathbb{Q}$.

2. Ogni gruppo $(G, *)$ gode di alcune importanti proprietà. Enunciamo e dimostriamo le due proprietà che in questa sede ci interessa prendere in esame. La prima di esse, a dire il vero, vale in ogni struttura in cui sia definita una legge di composizione interna.

- PROPRIETÀ 1. **Se in una struttura algebrica $(A,*)$ esiste un elemento neutro rispetto all'operazione "$*$" allora esso è unico**.
DIMOSTRAZIONE. Indicato con u l'elemento neutro, supponiamo che oltre ad esso ci sia in A un secondo elemento neutro u'. Allora si ha:
$$u * u' = u \quad \text{ed} \quad u * u' = u'.$$
Di conseguenza, in virtù dell'unicità del risultato dell'operazione, deve essere $u=u'$.

- PROPRIETÀ 2. **L'elemento simmetrico di ciascun elemento è unico**.
DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che di un qualsiasi elemento a di G esistano due elementi simmetrici: a' e a". Allora dovrebbe essere:
$$a * a' = u, \quad a'' * a = u\ .$$
Risulterebbe pertanto, in virtù di queste due uguaglianze e degli assiomi del gruppo:
$$a' = u * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * u = a''\ .$$
Il che prova che effettivamente l'elemento simmetrico di ogni elemento del gruppo è unico.

Nell'articolo succitato ho riportato esempi di gruppi commutativi e di gruppi non commutativi e non intendo qui ripetermi. Salvo riferire di un interessante modello di *gruppo commutativo* studiato da Felix Klein e che lo stesso Klein definì *Vierergruppe*, cioè *gruppo quadrinomio*.

Il gruppo in questione, oggigiorno denominato anche *gruppo di Klein*, è la struttura algebrica $(V, \ast)$, dove V è l'insieme $\{u, a, b, c\}$ mentre "$\ast$" è l'operazione definita dalla tabella sottostante (tabella 1).

⁎	u	a	b	c
u	u	a	b	c
a	a	u	c	b
b	b	c	u	a
c	c	b	a	u

tabella 1

3. Passiamo ora alle trasformazioni geometriche.

- Quando si ha a che fare con un loro insieme T, strutturato con l'operazione prodotto "∘", la dimostrazione che la struttura $(T, \circ)$ è un gruppo implica di necessità dimostrare che l'operazione sia associativa. E questo potrebbe apparire complicato, ma in realtà è piuttosto semplice, dal momento che vale il seguente teorema.

TEOREMA 1. Dato un insieme T di trasformazioni geometriche, chiuso rispetto all'operazione prodotto "∘" e prese tre sue qualsiasi trasformazioni t_1, t_2, t_3, risulta: $(t_1 \circ t_2) \circ t_3 = t_1 \circ (t_2 \circ t_3)$, vale a dire che l'operazione è associativa.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una qualsiasi figura A del piano e diciamo B, C, D le figure che si ottengono trasformandola via via come indicato in figura 1 da tre qualsiasi trasformazioni geometriche t_1, t_2, t_3. In altri termini: $B=t_1(A)$, $C=t_2(B)$, $D=t_3(C)$. Siano poi t_4 la trasformazione che muta A in D, t_5 quella che muta A in C e t_6 la trasformazione che porta B in D.

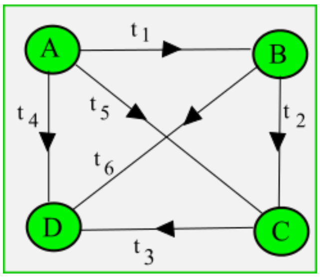

figura 1

Per cui: $t_1 \circ t_2 = t_5$, $t_2 \circ t_3 = t_6$, $t_5 \circ t_3 = t_1 \circ t_6 = t_4$.
Risulta chiaramente:

$$(t_1 \circ t_2) \circ t_3 = t_5 \circ t_3 = t_4 \qquad t_1 \circ (t_2 \circ t_3) = t_1 \circ t_6 = t_4$$

e pertanto $(t_1 \circ t_2) \circ t_3 = t_1 \circ (t_2 \circ t_3)$. Come volevasi dimostrare.

- Con più facilità, in genere, si riesce a stabilire se nell'insieme T esista o meno l'elemento neutro. In ogni caso, vale un secondo teorema.

TEOREMA 2. Se per ogni trasformazione t di T esiste in T la trasformazione simmetrica (o inversa) t^{-1}, allora esiste in T l'elemento neutro i.

DIMOSTRAZIONE. Sia F una figura del piano S^2 e sia F', sempre in S^2, la sua trasformata in base alla trasformazione $t \in T$ (figura 2). La trasformazione inversa t^{-1} trasforma evidentemente F' in F, per cui si ha: $t \circ t^{-1} = i$ e $t^{-1} \circ t = i$.

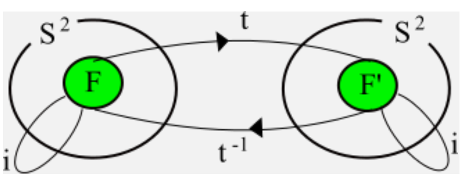

figura 2

Resta così provato che esiste in T l'elemento neutro i, vale a dire una trasformazione che, in realtà, non trasforma nulla poiché lascia tutto invariato.

Questa trasformazione è denominata ***trasformazione identica*** o ***identità***.

- Cosicché vale il seguente teorema fondamentale per riconoscere se un insieme di trasformazioni assume la struttura di gruppo.

TEOREMA FONDAMENTALE. **Un insieme T di trasformazioni geometriche del piano (ma anche dello spazio) assume la struttura di gruppo rispetto all'operazione prodotto "∘" se accade che:**

a) l'insieme T è chiuso rispetto all'operazione "∘";

b) per ogni trasformazione t appartenente a T esiste in T la trasformazione inversa t^{-1}.

DIMOSTRAZIONE. Di fatto, se si stabilisce che l'insieme T è chiuso rispetto all'operazione "∘" e che ogni elemento di T è simmetrizzabile, allora per il teorema 1, la struttura $(T, \circ)$ è associativa e per il teorema 2 ammette l'elemento neutro. Quindi sono soddisfatti tutti gli assiomi del gruppo.

4. Possiamo occuparci adesso di alcune particolari trasformazioni geometriche nel piano. Lo facciamo con il supporto della geometria analitica, ovvero mediante le equazioni delle trasformazioni prese in esame.

In teoria, si possono seguire due percorsi: uno in salita, dalle trasformazioni particolari a quelle generali, un altro in discesa, dalle trasformazioni generali a quelle particolari.

In un insegnamento elementare preferisco personalmente seguire il primo percorso, ma in questa circostanza mi sembra più conveniente il secondo.

Preciso che, come trasformazione più generale e quindi come punto di partenza assumerò le affinità, consapevole comunque che esistono trasformazioni geometriche ancora più generali, ma delle quali qui non intendo occuparmi.

5. Incominciamo dunque a prendere in considerazione le ***affinità,*** per dimostrare che formano un gruppo.

A questo riguardo, nel piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), consideriamo le seguenti equazioni:

(1) $$x' = a\,x + b\,y + c, \quad y' = a'x + b'y + c',$$

dove a, b, c, a', b', c' sono numeri reali purché sia $a\,b' - a'\,b \neq 0$.

Rappresentano infinite trasformazioni del piano in sé, dipendenti dai 6 parametri a, b, c, a', b', c'.

Ognuna di queste trasformazioni si chiama **trasformazione affine** o semplicemente **affinità**.

Le (1) sono dunque le *equazioni delle affinità*.

Se gli angoli che si corrispondono in un'affinità hanno lo stesso verso l'affinità si dice *diretta*, se hanno verso opposto l'affinità si dice *speculare* [1].

Dimostriamo che l'insieme $\mathcal{A}$ delle affinità è chiuso rispetto al prodotto "∘".

Consideriamo per questo due qualsiasi affinità, α_1 e α_2, di equazioni rispettivamente:

$$\alpha_1 : \begin{cases} x' = a_1\,x + b_1\,y + c_1 \\ y' = a'_1\,x + b'_1\,y + c'_1 \end{cases} \qquad \alpha_2 : \begin{cases} x' = a_2\,x + b_2\,y + c_2 \\ y' = a'_2\,x + b'_2\,y + c'_2 \end{cases}$$

Deve risultare ovviamente: $a_1\,b'_1 - a'_1\,b_1 \neq 0$ e $a_2\,b'_2 - a'_2\,b_2 \neq 0$.

Indicati con $P(x, y)$ un qualsiasi punto del piano, con $P'(x', y')$ il suo trasformato mediante α_1 e con $P''(x'', y'')$ il trasformato di P' mediante α_2, rimane definita la trasformazione $\alpha_1 \circ \alpha_2$ che a P associa direttamente P''. Si tratta di stabilire che le equazioni di questa trasformazione prodotto sono ancora del tipo (1) e perciò equazioni di un'affinità.

Ora, risulta:

[1] Di solito, invece di parlare di "trasformazione speculare" si parla di "trasformazione inversa". Personalmente preferisco la prima accezione, riservando la seconda al concetto di "trasformazione simmetrica rispetto al prodotto".

$$x'' = a_2\, x' + b_2\, y' + c_2 = a_2\,(a_1\, x + b_1\, y + c_1) + b_2\,(a'_1\, x + b'_1\, y + c'_1) + c_2 =$$
$$= (a_1 a_2 + a'_1 b_2)\, x + (a_2 b_1 + b_2 b'_1)\, y + (a_2 c_1 + b_2 c'_1 + c_2)\,,$$
$$y'' = a'_2\, x' + b'_2\, y' + c'_2 = a'_2\,(a_1\, x + b_1\, y + c_1) + b'_2\,(a'_1\, x + b'_1\, y + c'_1) + c'_2 =$$
$$= (a_1 a'_2 + a'_1 b'_2)\, x + (a'_2 b_1 + b'_1 b'_2)\, y + (a'_2 c_1 + b'_2 c'_1 + c'_2)\,.$$

Vale a dire:

$$x' = A\, x + B\, y + C,\quad y' = A' x + B' y + C',$$

dove A, B, C, A', B', C' sono funzioni dei coefficienti delle equazioni delle due affinità α_1 e α_2.

Si dimostra che:

$$A\, B' - A'\, B = (a_1\, b'_1 - a'_1\, b_1)(a_2\, b'_2 - a'_2\, b_2) \text{ e perciò: } A\, B' - A'\, B \neq 0.$$

Questo significa che anche $\alpha_1 \circ \alpha_2$ è un'affinità, per cui l'insieme $\mathcal{A}$ delle affinità piane è *chiuso* rispetto all'operazione prodotto "∘".

È così dimostrata una delle due condizioni che permettono di concludere che la struttura $(\mathcal{A}, \circ)$ è un gruppo.

Manca di dimostrare che ogni affinità ammette l'affinità inversa. Per provarlo è necessario risolvere il sistema delle equazioni (1) rispetto alle incognite x, y. A conti fatti si ottengono effettivamente le equazioni di un'affinità; precisamente:

$$x' = p\, x + q\, y + r,\quad y' = p' x + q' y + r',$$

dove p, q, r, p', q', r' sono funzioni dei coefficienti delle equazioni dell'affinità α, tali che $p\, q' - p' q \neq 0$.

Ogni affinità piana α ammette dunque l'inversa α^{-1}.

Possiamo pertanto concludere, in base al teorema fondamentale, che la struttura $(\mathcal{A}, \circ)$ è un *gruppo*.

Precisamente, è un *gruppo non commutativo*. Per provare quest'ultima affermazione basta trovare due affinità α_1 e α_2 tali per cui risulta: $\alpha_1 \circ \alpha_2 \neq \alpha_2 \circ \alpha_1$.

Sia allora α_1 l'affinità di equazioni $\{x' = 2\,x + y,\ y' = x + 2\,y\}$; e sia α_2 l'affinità di equazioni $\{x' = x + 2\,y,\ y' = -x + y + 1\}$. Ebbene, α_1 porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(2, 1)$, mentre α_2 porta $(2, 1)$ in $(4, 0)$, per cui l'affinità $\alpha_1 \circ \alpha_2$ porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(4, 0)$. D'altro canto, α_2 trasforma il punto $(1, 0)$ in se stesso, mentre α_1, come già visto, lo trasforma nel punto $(2, 1)$, per cui l'affinità $\alpha_2 \circ \alpha_1$ porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(2, 1)$. È dunque evidente che effettivamente $\alpha_1 \circ \alpha_2 \neq \alpha_2 \circ \alpha_1$.

Seguendo una classificazione ideata da Felix Klein (*Programma di Erlangen*, 1872) si ha la seguente definizione: *Lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto al gruppo delle affinità si chiama* ***geometria affine****.*

Elenchiamo alcuni di questi invarianti [(2)]. In particolare, ogni affinità:

- conserva l'allineamento dei punti; vale a dire che trasforma rette in rette;
- conserva il parallelismo delle rette; vale a dire che trasforma rette parallele in rette parallele;
- trasforma una conica di un dato tipo in una conica dello stesso tipo; vale a dire: un'ellisse in un'ellisse (la circonferenza è considerata una particolare ellisse), una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole.

Due rappresentazioni grafiche (figure 3-4), in cui la figura F è trasformata da una determinata affinità nella figura F' mostrano alcuni di questi invarianti.

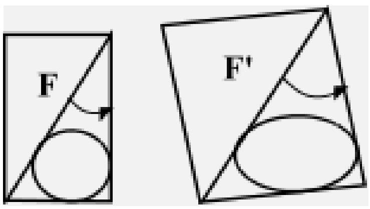

figura 3 – affinità diretta

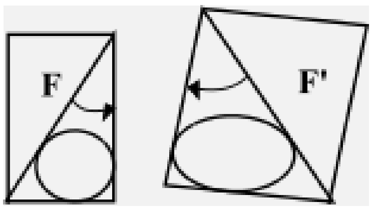

figura 4 – affinità speculare

---

[2] S'intende che questi invarianti, così come quelli che elencheremo in seguito, si possono dimostrare e questo si può fare facilmente utilizzando le equazioni delle trasformazioni. Lascio questo compito a chi ne avesse voglia.

6. Se nelle equazioni (1) si pone $a'=-b$, $b'=a$, per cui evidentemente $a\,b'-a'\,b>0$, si ottengono le *equazioni delle similitudini dirette* (come nelle affinità, due angoli corrispondenti hanno lo stesso verso):

(2) $$x' = a\,x + b\,y + c,\;\; y' = -b\,x + a\,y + c'.$$

Se invece poniamo $a'=b$, $b'=-a$, per cui $a\,b'-a'\,b<0$, si ottengono le *equazioni delle similitudini speculari* (come nelle affinità, due angoli corrispondenti hanno versi opposti):

$$x' = a\,x + b\,y + c,\;\; y' = b\,x - a\,y + c'.$$

Ragionando come per le affinità, si dimostra che l'operazione "∘" conferisce la struttura di *gruppo non commutativo* sia all'insieme delle similitudini (tutte: dirette e speculari), che pertanto è un *sottogruppo* del gruppo delle affinità, sia all'insieme delle sole similitudini dirette, che dunque è un *sottogruppo* del gruppo delle similitudini.

Lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto al gruppo delle similitudini si chiama ***geometria simile*** (o ***elementare***).

Alcuni degli invarianti e, in particolare, l'allineamento dei punti e il parallelismo delle rette, già segnalati per le affinità, si ritrovano anche nelle similitudini.

Ma in queste ultime c'è un invariante che non c'è nelle affinità: la conservazione delle ampiezze degli angoli. Questo fa sì che in una similitudine un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza, ovvero un angolo retto, venga trasformato da una similitudine in un angolo retto, per cui la circonferenza è mutata in una circonferenza, mentre in una generica affinità una circonferenza è trasformata in un'ellisse.

Come nelle affinità, una conica viene trasformata da una similitudine in una conica dello stesso tipo (con l'eccezione descritta prima).

In una similitudine, inoltre, si conserva il rapporto delle lunghezze. Ossia, se un generico segmento AB è trasformato da una similitudine nel segmento A'B', risulta:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = h\,,$$

dove h è un numero reale positivo, denominato *costante* (o *rapporto*) *di similitudine*.

Due rappresentazioni grafiche (figure 5-6), in cui la figura F è trasformata da una determinata similitudine nella figura F', mostrano alcuni di questi invarianti.

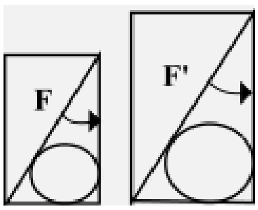

figura 5 – similitudine diretta

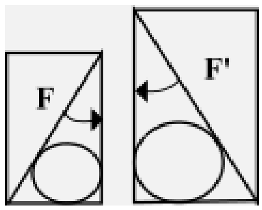

figura 6 – similitudine speculare

Se nelle (2) si pone $b=c=c'=0$, si ottiene una particolare similitudine, denominata ***omotetia*** di *centro* O (origine del sistema di riferimento) e *caratteristica* a. Le sue equazioni sono ovviamente le seguenti:

$$x' = a\,x,\;\; y' = a\,y.$$

Se $a>0$ l'omotetia si dice *diretta* (figura 7), se invece $a<0$ si dice *indiretta* (figura 8).

Ma, che sia diretta o che sia indiretta, l'omotetia è comunque una similitudine diretta di costante |a|.

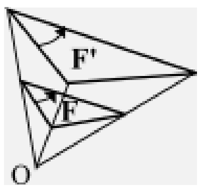

figura 7 – omotetia diretta

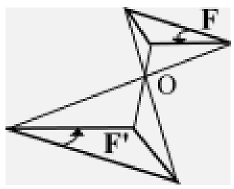

figura 8 – omotetia indiretta

Si dimostra che le omotetie di dato centro formano un *gruppo commutativo* rispetto al prodotto, *sottogruppo* del gruppo delle similitudini.

Agli invarianti di una generica similitudine, l'omotetia aggiunge però il seguente:

Nelle omotetie di dato centro ogni retta è trasformata in una retta parallela.

7. Se le equazioni (2) sono tali per cui a b'– a' b = 1, allora rappresentano le *equazioni di una isometria diretta*.

Se invece sono tali per cui a b'– a' b = –1, allora rappresentano le *equazioni di una isometria speculare*.

Si dimostra che l'operazione "∘" conferisce la struttura di *gruppo non commutativo* sia all'insieme delle isometrie (tutte, dirette e speculari), che pertanto è un *sottogruppo* del gruppo delle similitudini, sia all'insieme delle sole isometrie dirette, che dunque è un *sottogruppo* del gruppo delle isometrie.

Le isometrie sono anche denominate *movimenti euclidei*. Per questo: *Lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto al gruppo delle isometrie è definito* ***geometria euclidea***.

Tutti gli invarianti delle similitudini sono anche invarianti delle isometrie, con una particolarità, che il rapporto h fra due segmenti corrispondenti è adesso uguale ad 1, per cui i due segmenti sono congruenti. Insomma ogni isometria conserva le lunghezze. Due figure isometriche si dicono anche *congruenti* (o, alla maniera di Euclide: *uguali*, senza ipotizzare con ciò che siano la stessa figura).

Tra le isometrie dirette si segnalano:

- le ***traslazioni***, le cui equazioni, ottenute dalle (2) ponendo b'=a=1, a'=b=0, (e, per comodità: c=p, c'=q) sono le seguenti:
  $$x' = x + p\,,\ \ y' = y + q\,;$$
  formano un *gruppo commutativo*;
- le ***rotazioni di centro*** **O**, le cui equazioni, ottenute dalle (2) ponendo c=c'=0, sono le seguenti:
  $$x' = a\,x + b\,y\,,\ \ y' = a'x + b'y\,,$$
  ma sempre con a b'–a'b=1; formano un gruppo commutativo; fra queste rotazioni c'è, in particolare, la ***simmetria centrale di centro*** **O**, ottenuta ponendo nelle (2) b'=a=–1, a'=b=0, cosicché le sue equazioni sono le seguenti:
  $$x' = -x\,,\ \ y' = -y\,.$$

Tra le isometrie speculari si segnalano, in particolare:

- la *simmetria rispetto all'asse* x, le cui equazioni, ottenute dalle (2) ponendo a=1, b'=–1, b=c=a'=c'=0, sono le seguenti:
  $$x' = x\,,\ \ y' = -y\,;$$
- la *simmetria rispetto all'asse* y, le cui equazioni, ottenute dalle (2) ponendo a=–1, b'=1, b=c=a'=c'=0, sono le seguenti:
  $$x' = -x\,,\ \ y' = y\,.$$

Un diagramma di Eulero-Venn (figura 9) visualizza adeguatamente, ancorché in misura parziale, quanto esposto fin qui sulle trasformazioni geometriche.

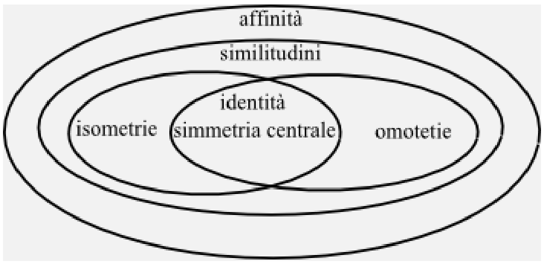

figura 9

8. Tra i ***movimenti euclidei*** hanno particolare interesse quelli che trasformano una figura in se stessa.

Ovviamente, considerato che questi particolari movimenti non possono essere traslazioni, l'interesse c'è se la figura presenta assi di simmetria e/o il centro di simmetria. Se tali simmetrie non ci sono, l'unico movimento che "trasforma" la figura in se stessa è evidentemente l'**identità**.

Tra le figure sulle quali intendo fermare l'attenzione ci sono il triangolo equilatero e il quadrato.

Farò tuttavia un cenno ai poligoni regolari in genere.

- Occupiamoci dei **movimenti che mutano un triangolo equilatero in sé.**

Sia allora assegnato il triangolo equilatero ABC.

- Tra i movimenti che lo mutano in se stesso c'è ovviamente l'identità: indichiamola con $\mathbf{m_0}$. Per sottolineare il fatto che essa lascia tutto al suo posto, usiamo il modo evidenziato nella figura 10, dove la matrice indica chiaramente che ogni vertice del triangolo è mutato in se stesso, mentre la rappresentazione grafica a fianco evidenzia il fatto che il triangolo ABC è trasformato in un triangolo che lascia esattamente al loro posto i vertici (per la verità, i due triangoli dovrebbero immaginarsi sovrapposti l'uno all'altro, in questa come nella successive situazioni).

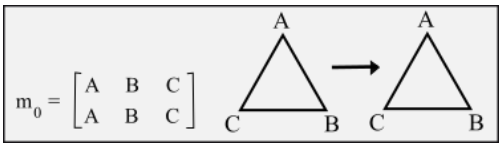

figura 10

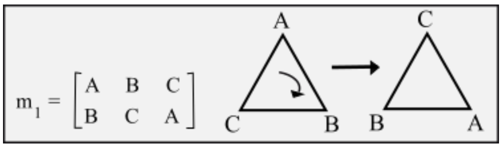

figura 11

- Un movimento vero e proprio è quello che ruota il triangolo di 120° in senso orario intorno al suo centro (figura 11). Lo chiamiamo $\mathbf{m_1}$. Esso porta A al posto di B, B al posto di C e C al posto di A.

Altri movimenti sono i seguenti:

- il movimento $\mathbf{m_2}$ che ruota il triangolo di 240°, in senso orario, intorno al suo centro (figura 12). Porta il vertice A in C, il vertice B in A ed il vertice C in B;

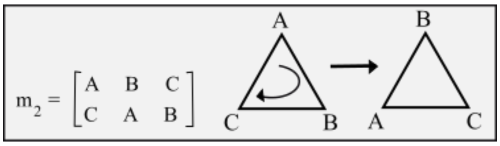

figura 12

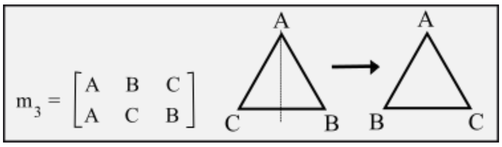

figura 13

- il movimento $\mathbf{m_3}$ che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice A (figura 13). Lascia A al suo posto, mentre porta B in C e C in B;
- il movimento $\mathbf{m_4}$ che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice B (figura 14). Lascia B al suo posto, mentre porta A in C e C in A;

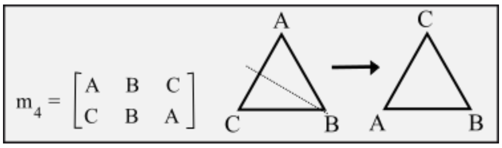

figura 14

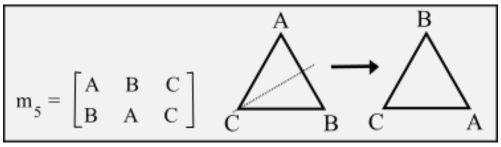

figura 15

- il movimento $\mathbf{m_5}$ che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice C (figura 15). Lascia C al suo posto, mentre porta A in B e B in A.

Dunque 6 movimenti, compresa l'identità, mutano un triangolo equilatero in sé.

Di questi movimenti, 3 avvengono nel piano, nel senso che il triangolo non esce dal piano che lo contiene: sono le *rotazioni*. Invece 3 costringono il triangolo ad uscire dal piano: sono i *ribaltamenti* (o *simmetrie assiali*).

L'aspetto interessante della questione è che, se due di questi movimenti si susseguono l'uno dopo l'altro, si ottiene ancora uno di tali movimenti. Ma come si trova questo movimento risultante?

Facciamo un esempio. Sia m_2 il primo movimento e m_4 il secondo. Per determinare il movimento risultante, cioè $m_2 \circ m_4$, si potrebbe riflettere sui movimenti effettivi del triangolo e trovare la risposta. Ma c'è un modo più semplice di farlo. Basta tener presente che si ha:

$$m_2 \circ m_4 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}$$

e costatare che il primo movimento porta A in C ed il secondo C in A, per cui il movimento composto porta A in A, ossia lascia A al suo posto; così pure il primo movimento porta B in A ed il secondo A in C, per cui il movimento composto porta B in C; analogamente si trova che il movimento composto porta C in B. Pertanto:

$$m_2 \circ m_4 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = m_3$$

In modo analogo si ragiona sulla composizione di due altri movimenti qualsiasi.

I risultati di quest'operazione "∘", considerata nell'insieme $M_3 = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ dei movimenti che mutano un triangolo equilatero in se stesso, possono essere tabellati (tabella 2) e una volta completata la tabella, si scopre facilmente che:

a) l'insieme M_3 è "chiuso" rispetto all'operazione prodotto "∘";
b) per ogni movimento esiste l'inverso: m_0, m_3, m_4, m_5 sono ciascuno inverso di se stesso, mentre m_1 e m_2 solo l'uno inverso dell'altro.

Questo, in base al teorema fondamentale, consente di concludere che la struttura $(M_3,\circ)$ è un *gruppo*, precisamente un *gruppo non commutativo*, il quale contiene, come *sottogruppo* commutativo il *gruppo delle rotazioni*, ossia l'insieme dei movimenti m_0, m_1, m_2.

∘	**m_0**	**m_1**	**m_2**	**m_3**	**m_4**	**m_5**
m_0	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_2	m_0	m_4	m_5	m_3
m_2	m_2	m_0	m_1	m_5	m_3	m_4
m_3	m_3	m_5	m_4	m_0	m_2	m_1
m_4	m_4	m_3	m_5	m_1	m_0	m_2
m_5	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1	m_0

tabella 2

La tabella mostra, fra l'altro, due fatti interessanti:

a) Componendo un qualunque movimento al di fuori del piano con ciascuno dei movimenti nel piano, si ottengono tutti i movimenti al di fuori del piano.
b) Componendo due qualsiasi movimenti al di fuori del piano, si ottiene un movimento nel piano.

- Per quanto attiene ai **movimenti che trasformano un quadrato in sé** si possono fare considerazioni analoghe a quelle relative al triangolo equilatero e trarre conclusioni simili. Mi limito ad alcuni cenni.

I movimenti in questione sono 8. Di essi 4 avvengono nel piano e sono rotazioni intorno al centro del quadrato (ivi compresa l'identità): $\{m_0, m_1, m_2, m_3\}$; 4 costringono il quadrato ad uscire dal piano e sono le simmetrie rispetto alle due mediane del quadrato $\{m_4, m_5\}$ e le simmetrie rispetto alle due rette diagonali $\{m_6, m_7\}$.

Come nel caso del triangolo, anche adesso questi movimenti possono essere composti mediante la solita operazione "∘" e i risultati possono essere tabellati (tabella 3).

∘	**m_0**	**m_1**	**m_2**	**m_3**	**m_4**	**m_5**	**m_6**	**m_7**
m_0	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
m_1	m_1	m_2	m_3	m_0	m_6	m_7	m_5	m_4
m_2	m_2	m_3	m_0	m_1	m_5	m_4	m_7	m_6
m_3	m_3	m_0	m_1	m_2	m_7	m_6	m_4	m_5
m_4	m_4	m_7	m_5	m_6	m_0	m_2	m_3	m_1
m_5	m_5	m_6	m_4	m_7	m_2	m_0	m_1	m_3
m_6	m_6	m_4	m_7	m_5	m_1	m_3	m_0	m_2
m_7	m_7	m_5	m_6	m_4	m_3	m_1	m_2	m_0

tabella 3

L'insieme M_4 di questi movimenti assume la struttura di *gruppo non commutativo* rispetto all'operazione prodotto "∘" e contiene come *sottogruppo commutativo* l'insieme delle rotazioni.

- Più in generale, è possibile prendere in esame i **movimenti che mutano un poligono regolare in sé**.

Ebbene, nel caso del triangolo equilatero abbiamo visto che tali movimenti sono 6, dei quali 3 avvengono nel piano e altrettanti al di fuori del piano.

Nel caso del quadrato abbiamo visto che sono 8, dei quali 4 nel piano e altrettanti al di fuori di esso.

In generale, i movimenti che mutano un poligono regolare di n lati in sé sono 2n, dei quali n nel piano (le rotazioni intorno al centro del poligono, identità compresa) ed n al di fuori di esso (si possono ottenere componendo uno di tali movimenti con ciascuno dei movimenti che avvengono nel piano).

L'insieme M_n di questi movimenti assume la struttura di *gruppo non commutativo* rispetto all'operazione prodotto "∘" e contiene come *sottogruppo commutativo* l'insieme delle rotazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] Antonino Giambò, *La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, SEI, 1988.
[2] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria, Storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[3] John Yarnelle, *Strutture matematiche finite*, Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1967.
[4] AA.VV., *Tendenze attuali dell'insegnamento della matematica* (a cura dell'UNESCO – traduzione di Giuseppe Festa), Torino, SEI, ristampa 1983.