Movimenti che mutano un poliedro regolare in sé.
di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo (*La struttura di gruppo*) mi sono occupato dei movimenti che mutano un poligono regolare in sé. Nello stesso articolo è stato dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA FONDAMENTALE. Un insieme T di trasformazioni geometriche del piano (ma anche dello spazio) assume la struttura di gruppo rispetto all'operazione prodotto "∘" se accade che:
a) l'insieme T è chiuso rispetto all'operazione "∘";
b) per ogni trasformazione t appartenente a T esiste in T la trasformazione inversa t^{-1}.

Il teorema ci sarà utile nel presente articolo, nel quale tratterò dei movimenti che mutano un poliedro regolare in sé.

Dico subito che c'è un'analogia con i movimenti che mutano un poligono regolare in sé, che porta ad una conclusione interessante.

Se ripensiamo a quei movimenti, ricordiamo che alcuni di essi (precisamente le rotazioni) agiscono senza uscire dal piano della figura; altri invece (le simmetrie assiali) agiscono uscendo dal piano per rientravi.

Qualcosa del genere accade con i poliedri regolari, quantunque sembri arduo capire come possa accadere che una figura solida esca dallo spazio ordinario (tridimensionale) in cui è immersa per poi rientrarvi. Cosa, invece, possibile – ed è questo l'aspetto interessante – se si ipotizza l'esistenza di un iperspazio a 4 dimensioni.

C'è però una differenza sostanziale tra i movimenti che mutano un poligono regolare in sé e i movimenti che mutano in sé un poliedro regolare: i poligoni infatti sono infiniti, mentre, com'è noto, i poliedri regolari sono solo cinque: tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

Orbene, in questo articolo mi soffermerò a lungo sui movimenti che mutano in sé un tetraedro regolare, farò qualcosa di più di un accenno ai movimenti che mutano in sé un esaedro e fornirò invece qualche breve indicazione circa i movimenti di ognuno degli altri poliedri regolari.

2. Ci occupiamo dunque dei movimenti che mutano un tetraedro regolare in sé. Per questo facciamo riferimento alla figura sottostante (figura 1), dove è rappresentato il tetraedro $A_1A_2A_3A_4$.

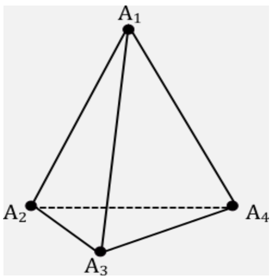

figura 1

- Il primo movimento che prendiamo in considerazione è quel movimento che … non cambia niente, cioè l'**identità i**. Esso lascia ogni vertice al suo posto e, come abbiamo fatto a suo tempo per i poligoni regolari, per indicare questo movimento ci serviamo di una tabella di corrispondenza dei vertici del tetraedro. In questa tabella i numeri indicano gli indici delle lettere che contrassegnano tali vertici:

$$i=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}.$$

- Ci sono poi **8 movimenti**, ottenuti facendo ruotare il tetraedro in seno antiorario, una prima volta di 120° (=360°·1/3) e una seconda volta di 240° (=360°·2/3), intorno a ciascuna della 4 altezze del tetraedro.

Il primo di questi 8 movimenti è la rotazione r_{11} di 120° intorno all'altezza condotta per il vertice A_1. Lascia al suo posto il vertice A_1, mentre porta A_2 in A_3, A_3 in A_4, A_4 in A_2 (figura 2). Può essere rappresentato dalla seguente tabella:

$$r_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

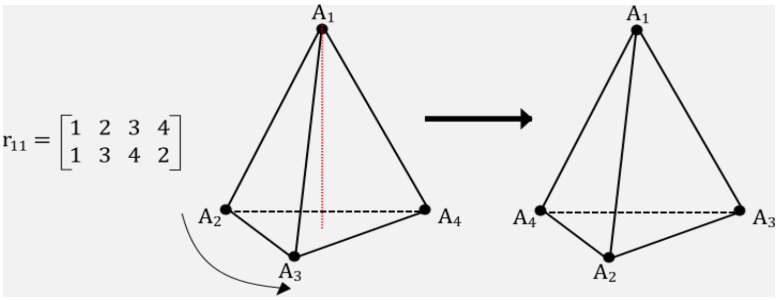

figura 2

Il secondo movimento è la rotazione r_{12} di 240° intorno all'altezza condotta per il vertice A_1. Lascia al suo posto il vertice A_1, mentre porta A_2 in A_4, A_3 in A_2, A_4 in A_3 (figura 3). Può essere rappresentato rappresentata dalla seguente tabella:

$$r_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

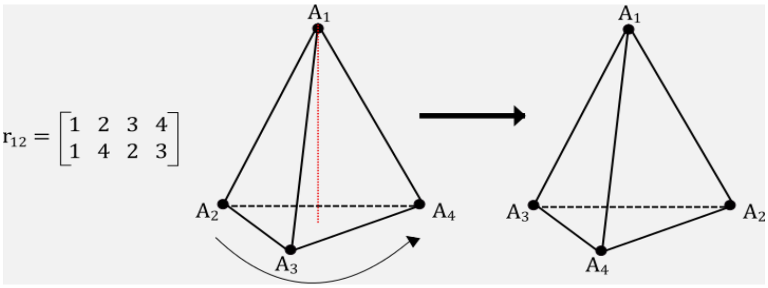

figura 3

Gli altri 6 movimenti sono:

- le rotazioni r_{21} e r_{22}, rispettivamente di 120° e 240°, intorno all'altezza condotta per il vertice A_2, rappresentate nell'ordine dalle tabelle seguenti:

$$r_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

- le rotazioni r_{31} e r_{32}, rispettivamente di 120° e 240°, intorno all'altezza condotta per il vertice A_3, rappresentate nell'ordine dalle tabelle seguenti:

$$r_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

- le rotazioni r_{41} e r_{42}, rispettivamente di 120° e 240°, intorno all'altezza condotta per il vertice A_4, rappresentate nell'ordine dalle tabelle seguenti:

$$r_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad r_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Ci sono ancora altre **3 rotazioni** da descrivere.

Per questo consideriamo la retta che congiunge i punti medi degli spigoli opposti A_1A_2 e A_3A_4 (figura 4).

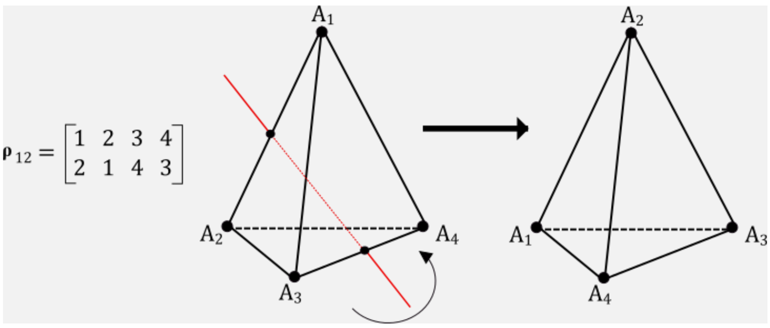

figura 4

Ebbene la rotazione di 180° intorno a questa retta, che indichiamo con ρ_{12} muta il poliedro in sé, scambiando reciprocamente i vertici A_1 e A_2 e i vertici A_3 e A_4. Può essere rappresentata dalla tabella seguente:

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Analogamente mutano il tetraedro in sé:

- la rotazione di 180° intorno alla congiungente i punti medi degli spigoli opposti A_1A_3 e A_2A_4, che indichiamo con ρ_{13} può essere rappresentata dalla tabella seguente:

$$\rho_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

- la rotazione di 180° intorno alla congiungente i punti medi degli spigoli opposti A_1A_4 e A_2A_3, che indichiamo con ρ_{14} può essere rappresentata dalla tabella seguente:

$$\rho_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

In conclusione ci sono, compresa l'identità, 12 movimenti che mutano un tetraedro regolare in sé, senza uscire dallo spazio ordinario.

3. Oltre ai 12 movimenti descritti sopra, che avvengono senza uscire dallo spazio ordinario, **ce ne sono altrettanti che però costringono il tetraedro ad uscire dallo spazio ordinario per ritornarvi alla fine del movimento**.

Questi 12 movimenti si ottengono componendo uno di essi, scelto arbitrariamente, con ciascuna delle 12 rotazioni descritte sopra. S'intende che il movimento scelto sarà sempre il primo componente del prodotto o sempre il secondo ma non a volte il primo e a volte il secondo.

Al fine di scegliere questo movimento, consideriamo il piano α_{12} individuato dallo spigolo A_1A_2 del tetraedro e dal punto medio dello spigolo opposto A_3A_4 (figura 5). Questo piano è un piano di simmetria per il tetraedro. Cosicché la simmetria s_{12} rispetto a questo piano α_{12} muta il tetraedro in sé. Essa lascia al loro posto i vertici A_1 e A_2 e muta l'uno nell'altro A_3 e A_4. Può essere rappresentata dalla seguente tabella:

$$s_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

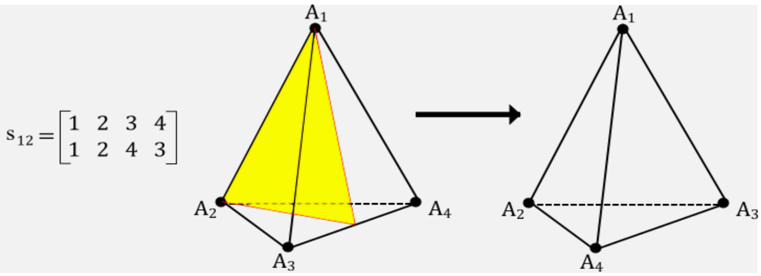

figura 5

Componiamo adesso questo movimento con ciascuna delle 12 rotazioni già descritte:

$$s_{12} \circ i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = s_{12};$$

$$s_{12} \circ r_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = s_{14};$$

$$s_{12} \circ r_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = s_{13};$$

$$s_{12} \circ r_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = s_{24};$$

$$s_{12} \circ r_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = s_{23};$$

$$s_{12} \circ r_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \sigma_1;$$

$$s_{12} \circ r_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \sigma_2\,;$$

$$s_{12} \circ r_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_3\,;$$

$$s_{12} \circ r_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_4\,;$$

$$s_{12} \circ \rho_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = s_{34}\,;$$

$$s_{12} \circ \rho_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_5\,;$$

$$s_{12} \circ \rho_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_6\,.$$

In conclusione, dei 12 movimenti che costringono il tetraedro ad uscire dallo spazio ordinario, 6 sono simmetrie rispetto a particolari piani ($s_{12},\ s_{13},\ s_{14},\ s_{23},\ s_{24},\ s_{34}$) e 6 sono composizioni di una simmetria (nello specifico s_{12}) con particolari rotazioni (nella fattispecie: $r_{31}, r_{32}, r_{41}, r_{42}, \rho_{13}, \rho_{14}$).

4. Una tabella di composizione dei 24 movimenti in questione mostra che l'operazione "∘", prodotto di due movimenti, è un'operazione ovunque definita nell'insieme M_4 di questi 24 movimenti. Inoltre, ogni movimento ammette il simmetrico. In particolare, sono simmetrici l'uno dell'altro i movimenti delle seguenti coppie:

$$i\text{-}i,\ \ r_{11}\text{-}r_{12},\ \ r_{21}\text{-}r_{22},\ \ r_{31}\text{-}r_{32},\ \ r_{41}\text{-}r_{42},\ \ \rho_{12}\text{-}\rho_{12},\ \ \rho_{13}\text{-}\rho_{13},\ \ \rho_{14}\text{-}\rho_{14},$$

$$s_{12}\text{-}s_{12},\ \ s_{13}\text{-}s_{13},\ \ s_{14}\text{-}s_{14},\ \ s_{23}\text{-}s_{23},\ \ s_{24}\text{-}s_{24},\ \ s_{34}\text{-}s_{34},\ \ \sigma_1\text{-}\sigma_4,\ \ \sigma_2\text{-}\sigma_3,\ \ \sigma_5\text{-}\sigma_6.$$

Questo implica, per il teorema fondamentale, che la struttura (M_4,∘) è un gruppo e precisamente un gruppo non commutativo.

Questo gruppo ammette come sottogruppo non commutativo la struttura (R_4,∘), dove R_4 è l'insieme delle 12 rotazioni, identità compresa. La tabella sottostante (tabella 1) evidenzia tutto ciò.

$\circ$	i	r_{11}	r_{12}	r_{21}	r_{22}	r_{31}	r_{32}	r_{41}	r_{42}	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}
i	i	r_{11}	r_{12}	r_{21}	r_{22}	r_{31}	r_{32}	r_{41}	r_{42}	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}
r_{11}	r_{11}	r_{12}	i	ρ_{13}	r_{32}	r_{41}	ρ_{14}	ρ_{12}	r_{21}	r_{31}	r_{42}	r_{22}
r_{12}	r_{12}	i	r_{11}	r_{42}	ρ_{14}	ρ_{12}	r_{22}	r_{31}	ρ_{13}	r_{41}	r_{21}	r_{32}
r_{21}	r_{21}	ρ_{14}	r_{31}	r_{22}	i	ρ_{13}	r_{42}	r_{11}	ρ_{12}	r_{32}	r_{12}	r_{41}
r_{22}	r_{22}	r_{41}	ρ_{13}	i	r_{21}	r_{12}	ρ_{12}	ρ_{14}	r_{32}	r_{42}	r_{31}	r_{11}
r_{31}	r_{31}	r_{21}	ρ_{14}	ρ_{12}	r_{41}	r_{32}	i	ρ_{13}	r_{12}	r_{11}	r_{22}	r_{42}
r_{32}	r_{32}	ρ_{12}	r_{42}	r_{11}	ρ_{13}	i	r_{31}	r_{22}	ρ_{14}	r_{21}	r_{41}	r_{12}
r_{41}	r_{41}	ρ_{13}	r_{22}	r_{31}	ρ_{12}	ρ_{14}	r_{11}	r_{42}	i	r_{12}	r_{32}	r_{21}
r_{42}	r_{42}	r_{32}	ρ_{12}	ρ_{14}	r_{12}	r_{21}	ρ_{13}	i	r_{41}	r_{22}	r_{11}	r_{31}
ρ_{12}	ρ_{12}	r_{42}	r_{32}	r_{41}	r_{31}	r_{22}	r_{12}	r_{21}	r_{11}	i	ρ_{14}	ρ_{13}
ρ_{13}	ρ_{13}	r_{22}	r_{41}	r_{32}	r_{11}	r_{42}	r_{21}	r_{12}	r_{31}	ρ_{14}	i	ρ_{12}
ρ_{14}	ρ_{14}	r_{31}	r_{21}	r_{12}	r_{42}	r_{11}	r_{41}	r_{32}	r_{22}	ρ_{13}	ρ_{12}	i

tabella 1

Inoltre, il gruppo (R_4,∘) ammette, a sua volta, un sottogruppo commutativo: si tratta della struttura (ρ, ∘), dove $\rho = \{\, i,\ \rho_{12},\ \rho_{13},\ \rho_{14} \,\}$.

E ammette altri 4 sottogruppi commutativi, in realtà piuttosto banali, aventi come sostegni i seguenti insiemi:

$$\{i, r_{11}, r_{12}\};\quad \{i, r_{21}, r_{22}\};\quad \{i, r_{31}, r_{32}\};\quad \{i, r_{41}, r_{42}\}.$$

5. Ci occupiamo adesso brevemente dei movimenti che mutano un cubo in sé. Per un esame più approfondito basta procedere come per il tetraedro. Comunque, chi volesse saperne di più su questo argomento può consultare il sito www.matematicagratuitaperscuolesuperiori.it, **testo base, unità 26 – Geometria dello spazio: nozioni intuitive**.

Diciamo subito che i movimenti che mutano in sé un cubo sono 48. Di essi, 24 sono rotazioni e quindi movimenti che si svolgono senza che il solido esca dallo spazio in cui è immerso; 24 sono invece movimenti che costringono il cubo ad uscire dallo spazio ordinario per ritornarvi alla fine del movimento.

- Occupiamoci delle 24 rotazioni [1].

- C'è anzitutto l'**identità i,** che come si sa, lascia tutto al suo posto.
- Consideriamo le tre rette a_1, a_2, a_3, ciascuna delle quali unisce i centri di due facce opposte del cubo (figura 6): si dicono *assi mediani* del cubo. Intorno a ciascuno di tali assi, tre rotazioni in senso antiorario – una di $90°$ $(=360°\cdot 1/4)$, una di $180°$ $(=360°\cdot 2/4)$, una di $270°$ $(=360°\cdot 3/4)$ – mutano il cubo in sé. Quindi complessivamente **9 rotazioni**. A seconda che queste rotazioni avvengano intorno alla retta a_1 o alla retta a_2 o alla retta a_3, le diciamo nell'ordine:
$$r_{11}, r_{12}, r_{13}; \quad r_{21}, r_{22}, r_{23}; \quad r_{31}, r_{32}, r_{33}.$$

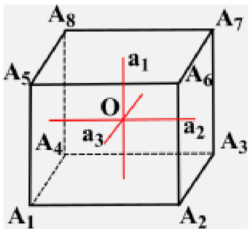

figura 6

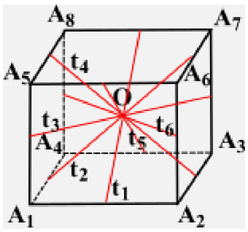

figura 7

- Consideriamo poi le rette $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, ciascuna delle quali unisce i punti medi di due spigoli opposti (figura 7): si dicono *assi traversi* del cubo. Le rotazioni di 180° intorno a ciascuno di tali assi mutano il cubo in sé. Quindi, complessivamente, **6 rotazioni**. Le chiamiamo nell'ordine:
$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6.$$
- Consideriamo, infine, le 4 *diagonali* del cubo (figura 8). Due rotazioni (in senso antiorario), una di 120° e una di 240°, intorno a ciascuna di esse, mutano il cubo in sé. Per cui sono da annoverare altre **8 rotazioni**. Le denominiamo:
$$\rho_{11}, \rho_{12}; \quad \rho_{21}, \rho_{22}; \quad \rho_{31}, \rho_{32}; \quad \rho_{41}, \rho_{42}.$$

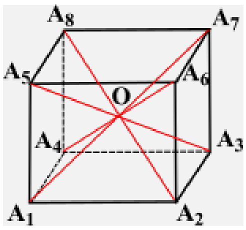

figura 8

- Per ottenere i 24 movimenti che costringono il cubo ad uscire dallo spazio ordinario, basta comporre uno qualunque di questi movimenti con ciascuna delle 24 rotazioni descritte sopra.

Ora, un movimento, che costringe il cubo ad uscire dallo spazio ordinario, è la simmetria centrale rispetto al centro del cubo. Per cui, eseguendo questo movimento e facendolo seguire da ciascuna delle 24 rotazioni, si ottengono per l'appunto i 24 movimenti in questione.

---

[1] Detto per completezza d'informazione, il **numero delle rotazioni** che mutano un poliedro regolare in sé è dato dal prodotto del numero di facce che concorrono in un vertice per il numero dei vertici. Cosicché, nel tetraedro questo numero è $3\times 4=12$, nel cubo è $3\times 8=24$, nell'ottaedro è $4\times 6=24$, nel dodecaedro è $5\times 12=60$, nell'icosaedro è $3\times 20=60$.

In particolare:
- componendo la simmetria centrale c con l'identità i si ritrova c;
- componendo la simmetria centrale c con le rotazioni r_{12}, r_{22}, r_{32} si ottengono le 3 simmetrie rispetto ai *piani mediani* del cubo, vale a dire i piani passanti per il centro del cubo e paralleli alle facce (in figura 9 è indicato uno di questi piani, quello parallelo alla faccia $\mathrm{A_1A_2A_3A_4}$);
- componendo la simmetria centrale c con le rotazioni $\mathrm{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6}$ si ottengono le 6 simmetrie rispetto ai *piani diagonali* del cubo, cioè i piani di due diagonali (in figura 10 è indicato il piano delle diagonali $\mathrm{A_1A_7}$ e $\mathrm{A_4A_6}$).

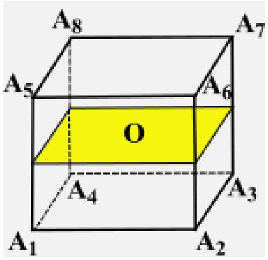

figura 9

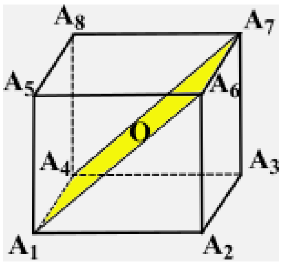

figura 10

Si ottengono così 10 particolari simmetrie. Gli altri 14 movimenti si trovano componendo c con le rimanenti rotazioni.

- Costruendo un'apposita tabella di composizione (operazione invero noiosa), si dimostra che i 48 movimenti che mutano il cubo in sé formano un gruppo non commutativo, che ammette come sottogruppo non commutativo l'insieme delle 24 rotazioni. Il gruppo delle rotazioni ammette poi come sottogruppo commutativo l'insieme costituito dall'identità e dalle 6 rotazioni introno agli assi traversi.

6. L'ottaedro regolare (figura 11) e l'esaedro regolare sono solidi cosiddetti *duali* l'uno dell'altro. Questo perché il solido avente per vertici i centri delle facce di un esaedro regolare è un ottaedro regolare (figura 12), così come il solido avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare è un esaedro regolare.

Questo implica, sostanzialmente, che **i movimenti che mutano un esaedro regolare in sé coincidono con i movimenti che mutano in sé un ottaedro regolare**.

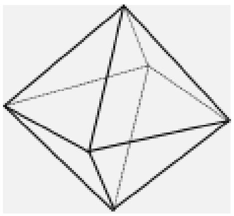
figura 11

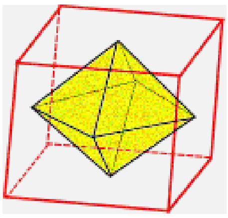
figura 12

7. Riguardo il **dodecaedro regolare** (figura 13) ci limitiamo ad un cenno, giusto a livello di curiosità.

I movimenti che mutano questo solido in sé sono complessivamente 120, dei quali 60 avvengono senza uscire dallo spazio ordinario e 60 uscendo da esso.

In particolare i primi 60 movimenti (rotazioni intorno a rette) sono:
- l'**identità**;
- quattro rotazioni in senso antiorario – una di 72° $(=360°\cdot 1/5)$, una di 144° $(=360°\cdot 2/5)$, una di 216° $(=360°\cdot 3/5)$, l'ultima di 288° $(=360°\cdot 4/5)$ – intorno a ciascuna delle rette che uniscono i centri delle 6 coppie di facce opposte (*assi mediani*), per complessive **24 rotazioni**;
- una rotazione di 180° in senso antiorario intorno a ciascuna delle rette che uniscono i punti medi delle 15 coppie di spigoli opposti (*assi traversi*), per complessive **15 rotazioni**;
- due rotazioni in senso antiorario (una di 120° e una di 240°) intorno a ciascuna delle rette che uniscono le 10 coppie di vertici opposti (*assi diagonali*), per complessive **20 rotazioni**.

Per quanto concerne i 60 movimenti che costringono il solido ad uscire dallo spazio ordinario vale quanto detto in precedenza sia per il tetraedro sia per il cubo.

I 120 movimenti che mutano un dodecaedro regolare in sé formano un gruppo non commutativo, che ammette come sottogruppo non commutativo le 60 rotazioni, che, a loro volta, ammettono come sottogruppo commutativo l'insieme formato dall'identità e dalle 15 rotazioni intorno agli assi traversi.

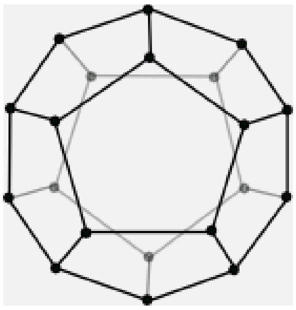
figura 13

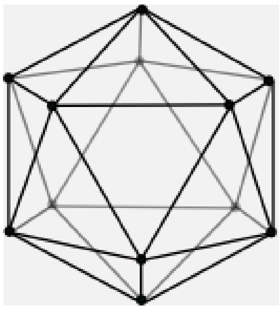
figura 14

Per quanto riguarda l'**icosaedro regolare** (figura 14), considerato che è il duale del dodecaedro, vale a dire che può essere concepito come il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un dodecaedro (figura 15), **i movimenti che lo mutano in sé sono esattamente quelli che mutano in sé il dodecaedro**.

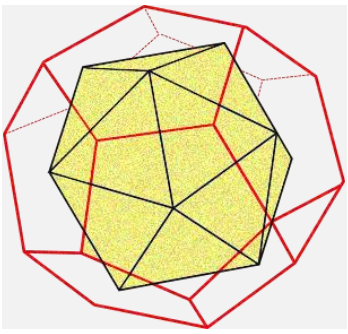
figura 15