Dal romanzo “Gli artisti dei numeri” – 1
di Antonino Giambò

1. *Gli artisti dei numeri* (titolo originale: *Christian und die Zahlenkünstler*) del matematico tedesco Albrecht Beutelspacher (n. 1950), è un romanzo che è stato pubblicato in Italia nel 2008 da Salani Editore, con la traduzione di Alessandro Peroni (figura 1).

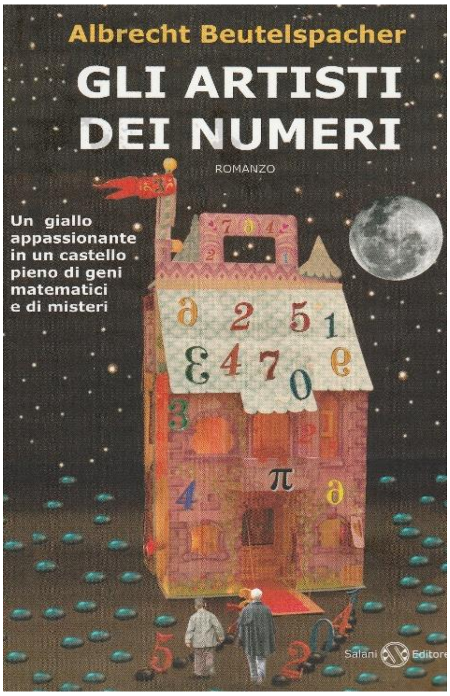

figura 1

Riporto un brano estratto dal romanzo [pagg. 138 e segg.]:

« Giorgio si tolse gli occhiali da sole e se li infilò di nuovo tra i capelli. Aveva la voce più rauca del solito: “Conosco un trucco infernale” disse in italiano. Prima di andare avanti, ebbe bisogno di carburare un po’: “Una cosa che piacerebbe al nostro amico tedesco”. Da come lo disse, era chiaro che si riferiva a Detlef. “Perché non è matematica europea, bensì indiana”.

« Giovanni si schiarì la voce. Era un modo per segnalare a Giorgio di venire al dunque.

« “È molto semplice” disse quest’ultimo senza che gli altri avessero ancora capito a che cosa si stesse riferendo. “L’avevo sentito una volta, e mi è tornato in mente adesso. Credo che provenga dall’India”. Neanche questo servì a chiarire l’argomento.

« Poi chiese: “Quanto fa 998 per 889?”

« Gli altri si guardarono. Laura sorrise, Giovanni e Ursula aggrottarono la fronte. Che razza di assurdità era? Ma Giorgio non si lasciò sviare e ripeté: “*È molto semplice!*”

« Prendiamo anzitutto il primo numero, 998. Aumentiamolo a 1.000. Per arrivare a 1.000 manca 2. Sottraiamo questo 2 dal secondo numero, e otteniamo 889 – 2, cioè 887. Annotiamoci questo numero”. Prese una penna e se lo scrisse sul palmo della mano.

« Fece una pausa come se volesse dare agli altri la possibilità di applaudirlo, ma nessuno batté le mani. Anche Laura aveva adesso un’espressione accigliata. Di che diavolo di insensatezze andava blaterando Giorgio?

« Questi proseguì imperterrito: “Ora prendiamo il secondo numero, 889. Aumentiamo anche questo a 1.000: 1.000 meno 889 fa 111. Moltiplichiamo questo 111 per il 2 di prima. Otteniamo 222. Segniamo questo numero in coda a quello che abbiamo appena scritto”. Scrisse 222 sulla mano. “Ne viene fuori il numero 887.222”. Fece un gesto teatrale: “Ecco! Questo è il risultato della moltiplicazione!”

« Tutti rimasero a bocca aperta. La sorpresa di Giorgio era riuscita. Nessuno diceva una parola. Laura tirò fuori dalla borsa la calcolatrice tascabile, ma ancor prima che digitasse i numeri, Christian sapeva già che il risultato era giusto.»

[Fecero un’altra prova con il prodotto 906 per 893. Funzionò ovviamente.]

« “Magico!” esclamò Laura, sbalordita.

« “È possibile anche dimostrarlo?” chiese Giovanni.

« “Certo” disse Ursula. “È pur sempre matematica. Ma se conosco bene Giorgio, a lui questo non importa più di tanto”.

« “È vero, hai ragione. Mi accontento del trucco”.»

Ursula ha ragione. È pur sempre una questione di matematica e si dovrebbe poter dimostrare. Anche se, non bisogna dimenticarlo, questo non sempre è vero. Esistono infatti molte questioni matematiche che non si riescono a dimostrare o per lo meno non ancora: sono le cosiddette “questioni aperte”.

Ma nel nostro caso una dimostrazione è effettivamente possibile. E ce ne vogliamo occupare.

Giorgio aveva dichiarato che “il trucco funziona con i numeri di poco inferiori a 1.000″.

Ma che vuol dire “di poco inferiori”? È troppo impreciso.

E poi, entrambi i numeri devono essere “di poco inferiori a 1.000” o basta che lo sia uno solo di essi?

Insomma, con quali numeri il procedimento funziona e qual è la dimostrazione del trucco?

Sono domande alle quali intendo dare risposta in questo breve e modesto contributo. Si tratta di cose fine a se stesse, se vogliamo, dal momento che il prodotto di due qualsiasi numeri è subito calcolato con l’uso di una semplice calcolatrice. Ma la questione, al di là dei calcoli, più o meno rapidi, non è priva d’interesse.

Almeno non è priva d’interesse per me e nutro una piccola speranza che qualche altro condivida il mio punto di vista.

Nello stesso romanzo un altro episodio mi offrirà lo spunto per altre considerazioni. Ma ne tratterò in un altro articolo, dove mi occuperò in particolare del celebre teorema di Fermat-Eulero.

2. Riguardo al trucco di Giorgio sono giunto alla seguente conclusione:

Il procedimento (o il trucco, come preferisce definirlo Giorgio) funziona se i due numeri naturali che si moltiplicano, M ed N, sono tali per cui M può essere un qualsiasi numero compreso fra 1 e 999, estremi inclusi, mentre, posto $K=1.000-M$, deve essere $\frac{K-1}{K}\cdot 1.000<N\leq 999$.

Nel primo esempio fornito da Giorgio si ha: $M=998$ e $N=889<999$. Per cui: $K=2$, $\frac{K-1}{K}\cdot 1.000=500$. Dunque $N>500$. Le condizioni sono rispettate e di fatto il trucco funziona.

Nel secondo esempio si ha: $M=906$ e $N=893<999$. Per cui $K=4$, $\frac{K-1}{K}\cdot 1.000=750$. Dunque $N>750$. Il trucco funziona ancora poiché di nuovo le condizioni sono rispettate.

Il procedimento può essere dimostrato. Lo facciamo.

DIMOSTRAZIONE DEL PROCEDIMENTO.

Sia M il primo numero (*moltiplicando*), con $1\leq M\leq 999$, ed N il secondo numero (*moltiplicatore*), con $N\leq 999$. Sia poi $K=1.000-M$ e quindi $M=10^3-K$.

Si ha:

$$M\times N=(10^3-K)\cdot N=10^3N-KN=10^3N-10^3K+10^3K-KN=(N-K)\cdot 10^3+(10^3K-KN).$$

Ovviamente deve essere $N-K>0$, ossia $N>K$, per cui $N>1.000-M$.

Quindi, una volta fissato M, con $1 \leq M \leq 999$, e calcolato $K=1.000-M$, può essere scelto N in modo che sia $1.000-M<N \leq 999$.

A questo punto si constata che $N-K$ sono le migliaia del numero $M \times N$, mentre 10^3K-KN ne sono le unità, ma a condizione che quest'ultimo numero sia un numero di non più di tre cifre, ossia che si abbia: $1.000\,K-KN<1.000$, ovvero: $N>\frac{K-1}{K} \cdot 1.000$.

In conclusione, con M tale che sia $1 \leq M \leq 999$, N deve essere tale per cui $\frac{K-1}{K} \cdot 1.000<N \leq 999$, affinché il numero $N-K$, dove $K=1.000-M$, rappresenti le migliaia del prodotto $M \times N$, mentre il numero $K \cdot (1.000-N)$ rappresenta la unità dello stesso prodotto.

Un controesempio conferma come al di fuori delle condizioni sopra dimostrate il trucco non funzioni più.

Sia al riguardo: $M=991$ ed $N=875$.

Aumentiamo il primo numero, 991, fino a 1.000: mancano $k=9$ unità. Il secondo numero N dovrebbe essere maggiore di $\frac{8}{9} \cdot 1.000 \approx 888$ affinché il trucco funzioni. Nel caso in esame non lo è e quindi il trucco non dovrebbe funzionare.

Di fatto, se sottraiamo 9 dal secondo numero, otteniamo 866, che non rappresenta il primo gruppo di tre cifre del prodotto 990×889, prodotto che è 867.125. Il numero $K \cdot (1.000-N)=9 \times 125=1.125$ è addirittura composto da più di tre cifre.

Faccio notare una circostanza particolare: quando $M \leq 500$, per cui $K \geq 500$, allora $N>998$. Cosicché, affinché il trucco funzioni, un solo valore minore di 1.000 è possibile prendere in considerazione per N, il valore 999.

Per esempio, prendiamo $M=400$, per cui solo $N=999$ può essere preso in considerazione affinché il trucco funzioni. Aumentiamo il primo numero, 400, fino a 1.000: mancano $K=600$ unità. Essendo $N-K=999-600=399$, questo è il gruppo di cifre che formano le migliaia del numero $M \times N$. Aumentiamo adesso fino a 1.000 anche il secondo numero, 999: manca chiaramente una unità, per cui il gruppo di cifre che formano le unità del prodotto $M \times N$ è $600 \times 1=600$. Di fatto, $M \times N=399.600$.

Come controesempio, si può osservare che già per $N=998$ (sempre $M=400$) il trucco non funziona. Infatti, essendo $K=998-600=398$, questo numero non indica le migliaia del prodotto 400×998, prodotto che vale 399.200. Siccome poi mancano 2 unità per aumentare 998 a 1.000, il numero delle unità del prodotto è $600 \times 2=1.200$, cioè un gruppo di più di tre cifre.

3. I due precedenti controesempi – valutati con la necessaria attenzione – ci offrono tuttavia il destro per una breve ma interessante riflessione.

È vero che il trucco di Giorgio non funziona né per il prodotto 991×875 né per 400×998. Ma fingiamo ugualmente di applicare la regola descritta.

Nel primo caso il prodotto 991×875, come calcolato prima, risulta formato da 866 migliaia e da 1.125 unità; come dire 866 migliaia più 1 migliaio e 125 unità; ossia 867 migliaia e 125 unità. Quindi $991 \times 875=867.125$. Esattamente come deve essere.

Nel secondo caso il prodotto 400×998 risulta formato da 398 migliaia e da 1.200 unità; come dire 398 migliaia più 1 migliaio e 200 unità, ossia 399 migliaia e 200 unità. Cosicché $400 \times 998= 399.200$. Di nuovo il risultato è corretto.

In conclusione, è vero che il trucco non funziona se applicato direttamente, ma funziona con un semplice aggiustamento.

Possiamo, a questo punto, fornire una regola più generale di quella proposta da Giorgio:

GENERALIZZAZIONE DEL PROCEDIMENTO.

Si voglia calcolare il prodotto $M \times N$ dei numeri naturali M e N, tali che sia $1 \leq M \leq 999$ e $K < N \leq 999$, dove $K = 1.000 - M$. Si calcolano i seguenti numeri: $N - K$ e $K \cdot (1.000 - N)$.

Se il numero $K \cdot (1.000 - N)$ è formato da P migliaia e Q unità, ossia se è $K \cdot (1.000 - N) = P \cdot 10^3 + Q$, con $0 \leq Q \leq 999$, allora il numero $N - K + P$ rappresenta le migliaia del prodotto $M \times N$, mentre il numero Q ne rappresenta le unità.

In altri termini:

$$M \times N = (N - K + P) \cdot 10^3 + Q\,.$$

Ovviamente, P può essere uguale a 0, il che, come sappiamo, accade quando $N > \frac{K-1}{K} \cdot 1.000$. In questo caso si ritrova il trucco di Giorgio.

La seguente tabella (tabella 1) fornisce alcuni esempi a ulteriore chiarimento di quanto esposto.

M $1 \leq M \leq 999$	K $= 1.000 - M$	$\frac{K-1}{K} \cdot 1.000$	N $N > K$	$K \cdot (1.000 - N)$ $= P \cdot 10^3 + Q$	$M \times N$ $= (N - K + P) \cdot 10^3 + Q$
25	975	998,9	980	$19 \cdot 10^3 + 500$	$24 \cdot 10^3 + 500 = 24.500$
25	975	998,9	999	$0 \cdot 10^3 + 975$	$24 \cdot 10^3 + 975 = 24.975$
579	421	997,6	476	$220 \cdot 10^3 + 604$	$275 \cdot 10^3 + 604 = 275.604$
579	421	997,6	998	$0 \cdot 10^3 + 842$	$577 \cdot 10^3 + 842 = 577.842$
887	113	991,1	115	$100 \cdot 10^3 + 005$	$102 \cdot 10^3 + 005 = 102.005$
887	113	991,1	992	$0 \cdot 10^3 + 904$	$879 \cdot 10^3 + 904 = 879.904$

tabella 1