Criteri di divisibilità – Parte seconda

di Antonino Giambò

1. Riprendiamo l'argomento trattato nella prima parte, a cominciare dal criterio generale di divisibilità. Forniremo quindi, come applicazione di tale criterio, alcuni particolari criteri di divisibilità. Seguiranno dei criteri alternativi, in qualche caso anche concettualmente più semplici del criterio generale. Concluderemo mostrando come i criteri di divisibilità dipendano dal sistema di numerazione.

Per comodità di chi legge operiamo una sintesi delle cose che sono necessarie per determinare i vari criteri di divisibilità, a partire dal criterio generale.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ NEL SISTEMA DI NUMERAZIONE DECIMALE.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero N, scritto nel sistema di numerazione decimale, sia divisibile per il numero m>1, è che sia divisibile per m la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per m.

Dopo aver ricordato che i coefficienti di divisibilità per m altro non sono che i resti delle divisioni delle potenze di 10 per m, possono essere utili alcune precisazioni relative alla successione dei coefficienti di divisibilità:

- Se 10 ed m sono numeri coprìmi, la successione dei coefficienti di divisibilità per m è periodica semplice.
- Se invece 10 ed m non sono numeri primi fra loro, allora la successione dei coefficienti di divisibilità per m è una successione periodica mista, presenta cioè un antiperiodo e un periodo.

2. Possiamo, a questo punto, dedicarci alla ricerca dei criteri di divisibilità del numero

$$\mathrm{N} = \mathrm{a_n} 10^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}} 10^{\mathrm{n-1}} + \cdots + \mathrm{a_2} 10^2 + \mathrm{a_1} 10^1 + \mathrm{a_0} 10^0$$

per particolari valori di m. Lo faremo esattamente per i valori di m compresi fra 2 e 13 inclusi.

Precisiamo una volta per tutte, senza ripeterlo di volta in volta, che il numero N è **scritto nel sistema di numerazione decimale**

Come si potrà costatare, alcuni dei criteri che andremo a trovare sono noti, altri forse non lo sono.

Suddivideremo questa ricerca in due parti. Nella prima parte prenderemo in considerazione i casi in cui m è la potenza, con esponente non nullo, di un numero primo, vale a dire $\mathrm{m}=\mathrm{p}^{\mathrm{e}}$, con p numero primo ed $\mathrm{e}>0$, e pertanto per i seguenti valori di m: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13: nella seconda prenderemo in considerazione i casi in cui m è il prodotto di un qualsiasi numero di fattori e pertanto dei seguenti valori di m: 6, 10, 12.

Incominciamo a prendere in esame i casi in cui $\mathrm{m}=\mathrm{p}^{\mathrm{e}}$, con p numero primo ed $\mathrm{e}>0$.

(È inutile trattare di criteri di divisibilità per 1 dal momento che ogni numero è divisibile per 1.)

- Sia **m=2**. Siccome 10 non è primo con 2, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 2, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 2, è periodica mista.

Calcoliamo questi coefficienti di divisibilità. La sottostante tabella (tabella 1) li riassume, mettendo anche in evidenza che l'antiperiodo della successione è formato da un solo termine e così pure il periodo.

x	0	1	2	3
10^{x}	1	10	100	1.000
$10^{\mathrm{x}} \bmod 2$	1	0	0	0

tabella 1

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 2. Essa è la seguente:

$$\mathrm{S} = \mathrm{a_0} \cdot 1 + \mathrm{a_1} \cdot 0 + \mathrm{a_2} \cdot 0 + \cdots + \mathrm{a_n} \cdot 0 = \mathrm{a_0}.$$

Siccome $\mathrm{N} \equiv_2 \mathrm{S}$, per cui: $\mathrm{N} \equiv_2 \mathrm{a_0}$, si desume il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 2:
Il numero N è divisibile per 2 se l'ultima sua cifra è divisibile per 2, cioè se il numero è pari.

- Sia **m=3**. Siccome 10 è primo con 3, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 3, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 3, è periodica semplice. Una tabella (tabella 2) mostra che il periodo della successione è formato da un solo termine.

x	0	1	2	3
10^x	1	10	100	1.000
10^x mod 3	1	1	1	1

tabella 2

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 3. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Siccome $N \equiv_3 S$, per cui:

$$N \equiv_3 a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, ,$$

si desume il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 3:
Il numero N è divisibile per 3 se lo è la somma delle sue cifre.

- Sia **m=5**. Siccome 10 non è primo con 5, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 5, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 5, è periodica mista.

Con le medesime considerazioni fatte nel caso di m=2, si giunge ad una conclusione analoga, vale a dire: $N \equiv_5 a_0$. Da cui si desume il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 5:
Il numero N è divisibile per 5 se l'ultima sua cifra è divisibile per 5, se cioè è 0 o 5.

- Sia **m=4**. Siccome 10 non è primo con 4, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 4, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 4, è periodica mista. La sottostante tabella (tabella 3) li riassume, mettendo anche in evidenza che l'antiperiodo della successione dei resti è formato da 2 termini mentre il periodo è costituito da un solo termine.

x	0	1	2	3
10^x	1	10	100	1.000
10^x mod 4	1	2	0	0

tabella 3

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 4. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_0 + 2\,a_1.$$

Siccome $N \equiv_4 S$, allora: $N \equiv_4 a_0 + 2\,a_1$. D'altro canto, $2 \equiv_4 10$. Per cui risulta: $N \equiv_4 a_1 10 + a_0$.

Considerato che $a_1 10 + a_0$ è il numero formato dalle ultime due cifre di N, abbiamo il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 4:
Il numero N è divisibile per 4 se lo è il numero formato dalle sue ultime due cifre (compreso il caso che questo numero sia 00, laddove si tenga presente che il numero 0 è divisibile per ogni naturale non nullo).

- Sia **m=8**. Siccome 10 non è primo con 8, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 8, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 8, è periodica mista. La sottostante tabella (tabella 4) li riassume, mettendo anche in evidenza che l'antiperiodo della successione dei resti è formato da 3 termini mentre il periodo è costituito da un solo termine.

x	0	1	2	3	4
10^x	1	10	100	1.000	10.000
10^x mod 8	1	2	4	0	0

tabella 4

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 8. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2.$$

Siccome $N \equiv_8 S$, allora: $N \equiv_8 a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2$.

D'altro canto, $2 \equiv_8 10$ mentre $4 \equiv_8 10^2$. Per cui risulta: $N \equiv_4 a_2\,10^2 + a_1 10 + a_0$.

Considerato che $a_2\,10^2 + a_1 10 + a_0$ è il numero formato dalle ultime 3 cifre di N, si ha il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 8:
Il numero N è divisibile per 8 se lo è il numero formato dalle sue ultime tre cifre (compreso il caso che questo numero sia 000 per il motivo già detto).

- Sia **m=9**. Siccome 10 è primo con 9, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 9, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 9, è periodica semplice.

Con le medesime considerazioni fatte nel caso di m=3, si giunge alla stessa conclusione, vale a dire che la successione dei coefficienti di divisibilità per 9, è la seguente:

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{\text{n+1 coefficienti}}\ .$$

Per cui, come nel caso di m=3, si ha: $N \equiv_9 a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ne consegue il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 9:
Il numero N è divisibile per 9 se lo è la somma delle sue cifre.

- Sia **m=7**. Siccome 10 è primo con 7, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 7, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 7, è periodica semplice. Una tabella (tabella 5) mostra che il periodo della successione è formato da 6 termini.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
10^x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
10^x mod 7	1	3	2	6	4	5	1	3

tabella 5

Considerato che stiamo prendendo in esame numeri congrui rispetto al modulo 7 e tenuto presente che:

$$6 \equiv_7 -1,\ 4 \equiv_7 -3,\ 5 \equiv_7 -2$$

come periodo della successione può essere assunto il seguente: $1,\ 3,\ 2, -1, -3, -2$.

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 7. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot (-1) + a_4 \cdot (-3) + a_5 \cdot (-2).$$

Si ha d'altro canto: $1 \equiv_7 10^0,\ 3 \equiv_7 10^1,\ 2 \equiv_7 10^2$.

Per cui risulta: $N \equiv_7 a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 - a_3 10^0 - a_4\,10^1 - a_5 10^2$.

Ossia:

$$N \equiv_7 (a_2 - a_5)\,100 + (a_1 - a_4)10 + (a_0 - a_3)\,.$$

Si desume il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 7:

Il numero N è ripartito in gruppi di 6 cifre, a partire da destra. Per ogni gruppo si calcola la seguente somma:

$$\mathbf{100\,a + 10\,b + c\,,}$$

dove a = $a_2 - a_5$, b = $a_1 - a_4$, c = $a_0 - a_3$.

Il numero N è divisibile per 7 se lo è la somma delle somme ottenute per i vari raggruppamenti.

È utile un esempio chiarificatore.

Sia allora N=7.207.172.959. Si ripartisce il numero in due gruppi di 6 cifre ciascuno, a partire da destra:

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	7	2	9	5	9

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	7	2	0	7

Con riferimento al 1° gruppo di cifre, si costata che si ha:

$$a = a_2 - a_5 = 9 - 1 = 8,\quad b = a_1 - a_4 = 5 - 7 = -2,\quad c = a_0 - a_3 = 9 - 2 = 7.$$

Per cui si ha la prima somma: $S_1 = 100\,a + 10\,b + c = 100 \cdot 8 + 10 \cdot (-2) + 7 = 787$.

Si ripete l'operazione per il 2° gruppo di cifre:

$$a = a_2 - a_5 = 2 - 0 = 2,\quad b = a_1 - a_4 = 0 - 0 = 0,\quad c = a_0 - a_3 = 7 - 7 = 0.$$

Per cui si ha la seconda somma: $S_2 = 100\,a + 10\,b + c = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 0 = 200$.

Si calcola la somma S delle due somme ottenute: $S = S_1 + S_2 = 787 + 200 = 987$.

Siccome S è divisibile per 7, anche N lo è.

- Sia **m=11**. Siccome 10 è primo con 11, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 11, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 11, è periodica semplice. Una tabella (tabella 5) mostra che il periodo della successione è formato da 2 termini.

x	0	1	2	3
10^x	1	10	100	1.000
10^x mod 11	1	10	1	10

tabella 5

D'altro canto, considerato che stiamo prendendo numeri congrui rispetto al modulo 11, e tenuto presente che $10 \equiv_{11} -1$, la successione dei resti (modulo 11) delle successive potenze di 10, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 11, ha il seguente periodo: $1, -1$.

La successione dei coefficienti di divisibilità per 11 è perciò la seguente:

$$\underbrace{1 \quad -1 \qquad 1 \quad -1 \qquad 1 \quad -1 \quad \dots \; (-1)^n}_{\text{n+1 coefficienti}}\,.$$

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 11. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 - a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 - a_3 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot (-1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n \cdot a_n\,.$$

Siccome vogliamo che N sia divisibile per 11 e siccome $N \equiv_{11} S$, allora deve essere 0 il resto della divisione di S per 11. Per questo bisogna calcolare la somma S' dei coefficienti di posto dispari (a partire da destra) e la somma S'' dei coefficienti di posto pari. Se questa somma è un multiplo di 11 (compreso ovviamente S=0), allora S è divisibile per 11 ed anche N lo è. Si ha pertanto il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 11:

Il numero N è divisibile per 11 se lo è la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari, a partire da destra, e la somma delle cifre di posto pari.

Anche in questo caso un esempio può chiarire.

Sia allora il numero N=7.632.372. Calcoliamo la somma S’ delle sue cifre di posto dispari, a partire da destra, e la somma S” delle sue cifre di posto pari:

$$S' = 2 + 3 + 3 + 7 = 15, \quad S'' = 7 + 2 + 6 = 15.$$

Siccome $S' - S''=0$, che è multiplo di 11, allora N è divisibile per 11.

- Sia **m=13**. Siccome 10 è primo con 13, la successione dei resti delle divisioni delle successive potenze di 10 per 13, vale a dire la successione dei coefficienti di divisibilità per 13, è periodica semplice. Una tabella (tabella 7) mostra che il periodo della successione è formato da 6 termini.

Possiamo calcolare preventivamente quanti sono i termini del periodo della successione, ricordando che il loro numero è dato dal gaussiano g di 13 rispetto alla base 10, che, com’è noto, è il più piccolo numero naturale non nullo che soddisfa all’equazione $10^x \equiv_{13} 1$. Con un po’ di pazienza (e con il supporto di una calcolatrice) si trova g=6. Una tabella (tabella 7) evidenzia questi resti.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
10^x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
10^x mod 13	1	10	9	12	3	4	1	10

tabella 7

D’altro canto, considerato che stiamo prendendo numeri congrui rispetto al modulo 13 e tenuto presente che:

$$10 \equiv_{13} -3, \quad 9 \equiv_{13} -4, \quad 12 \equiv_{13} -1,$$

possiamo assumere come periodo della successione il seguente:

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad -1 \quad 3 \quad 4\,.$$

Possiamo calcolare adesso la somma S dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna cifra di N per il corrispondente coefficiente di divisibilità per 13. Essa è la seguente:

$$S = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-3) + a_2 \cdot (-4) + a_3 \cdot (-1) + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 4\,.$$

Si ha d’altro canto:

$$1 \equiv_{13} 10^0, \quad -3 \equiv_{13} 10^1, \quad -4 \equiv_{13} 10^2.$$

Per cui risulta:

$$N \equiv_{13} a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 - a_3 10^0 - a_4 10^1 - a_5 10^2.$$

Ossia:

$$N \equiv_{13} (a_2 - a_5)\, 100 + (a_1 - a_4) 10 + (a_0 - a_3)\,.$$

Si desume il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 13:

Il numero N è ripartito in gruppi di 6 cifre, a partire da destra. Per ogni gruppo si calcola la seguente somma:

$$\mathbf{100\ a + 10\ b + c\ ,}$$

dove $a = a_2 - a_5$, $b = a_1 - a_4$, $c = a_0 - a_3$.

Il numero N è divisibile per 13 se lo è la somma delle somme ottenute per i vari raggruppamenti.

Ancora una volta può servire da chiarimento un apposito esempio.

Sia allora N=7.783.022. Si ripartisce il numero in due gruppi di 6 cifre ciascuno, a partire da destra:

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
7	8	3	0	2	2

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	7

Con riferimento al 1° gruppo di cifre, si costata che si ha:

$$a = a_2 - a_5 = 0 - 7 = -7, \quad b = a_1 - a_4 = 2 - 8 = -6, \quad c = a_0 - a_3 = 2 - 3 = -1.$$

Per cui si ha la prima somma: $S_1 = 100\ a + 10\ b + c = 100 \cdot (-7) + 10 \cdot (-6) - 1 = -761$.

Si ripete l’operazione per il 2° gruppo di cifre:

$$a = a_2 - a_5 = 0 - 0 = 0, \quad b = a_1 - a_4 = 0 - 0 = 0, \quad c = a_0 - a_3 = 7 - 0 = 7.$$

Per cui si ha la seconda somma: $S_2 = 100\,a + 10\,b + c = 100 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 7 = 7$.

Si calcola la somma S delle due somme ottenute: $S = S_1 + S_2 = -761 + 7 = -754$.

Siccome S è divisibile per 13, anche N lo è.

3. Occupiamoci adesso dei casi in cui il divisore m è un prodotto di fattori, per esempio:

$$m = {p_1}^{e_1} \cdot {p_2}^{e_2} \cdot {p_3}^{e_3} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{e_k}.$$

Volendo, anche adesso si può ricorrere al criterio generale di divisibilità per m. Ma in questi casi c'è un modo più immediato.

Tenendo presente infatti che un numero N è divisibile per m se ogni fattore di m divide N, si capisce che, se m è uguale al prodotto suddetto, allora N è divisibile per m se è divisibile per ognuno dei fattori ${p_1}^{e_1}, {p_2}^{e_2}, {p_3}^{e_3}, \ldots, {p_k}^{e_k}$.

Ecco allora alcuni criteri di divisibilità in questi casi.

- Sia **m=6**. Siccome $6=2\cdot 3$, il numero N è divisibile per 10 se è divisibile sia per 2 sia per 3. Vale, pertanto, il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 6:
Il numero N, scritto nel sistema di numerazione decimale, è divisibile per 6 se è pari e la somma delle sue cifre è divisibile per 3.

- Sia **m=10**. Siccome $10=2\cdot 5$, allora N è divisibile per 10 se è divisibile sia per 2 sia per 5. Ossia se termina per 0. Vale, pertanto, il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 10:
Il numero N è divisibile per 10 se termina per 0.

- Sia **m=12**. Siccome $12=3\cdot 4$, allora N è divisibile per 12 se è divisibile sia per 3 sia per 4. Vale, pertanto, il seguente criterio.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 12:
Il numero N è divisibile per 12 se la somma delle sue cifre è divisibile per 3 e le ultime due cifre formano un numero divisibile per 4.

4. Potremmo continuare, ma ritengo che quanto detto sia più che sufficiente per far comprendere come si possano trovare criteri di divisibilità per altri valori di m, per cui la chiudiamo qui.

Una considerazione, però, mi pare opportuno fare. Ho accennato all'esistenza di criteri di divisibilità alternativi e all'esistenza di dimostrazioni diverse degli stessi criteri e mi sembra giusto chiarire questo punto.

Basta qualche esempio.

- Da quanto detto nelle pagine precedenti s'intuisce che un numero è divisibile per 2^p, con $p \in \mathbb{N}_0$, se le sue ultime p cifre formano un numero divisibile per 2^p. E questo in effetti può essere dimostrato sulla base del solito criterio. Ma si può fornire una dimostrazione alternativa. La vediamo.

Sia allora il numero $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$.

Indicando con N_1 il numero formato dalle sue ultime p cifre e con N_2 il numero formato dalle cifre rimanenti, possiamo scrivere: $N=N_2\cdot 10^p+N_1$. Si ha pertanto:

$$\frac{N}{2^p} = \frac{N_2 \cdot 10^p + N_1}{2^p} = N_2 \cdot 5^p + \frac{N_1}{2^p}.$$

Si deduce che N è divisibile per 2^p se lo è N_1 ossia il numero formato dalle ultime p cifre di N. Si ha pertanto il seguente criterio.

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 2^p:
Il numero N è divisibile per 2^p se lo è il numero formato dalle sue ultime p cifre.

Nello specifico:
- N è divisibile per 2 se l'ultima sua cifra è divisibile per 2;
- N è divisibile per 2^2=4 se le ultime 2 cifre formano un numero divisibile per 4;
- N è divisibile per 2^3=8 se le ultime 3 cifre formano un numero divisibile per 8;
- N è divisibile per 2^4=16 se le ultime 4 cifre formano un numero divisibile per 16.

- Procedendo all'incirca come nel caso precedente, si può ottenere una dimostrazione alternativa del seguente criterio di divisibilità per 5^p, dimostrabile comunque anche con il criterio generale.

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 5^p:
Il numero N è divisibile per 5^p se lo è il numero formato dalle sue ultime p cifre.

- Forniamo adesso un criterio alternativo di divisibilità per 7 e la relativa dimostrazione

Sia allora il numero $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$, formato da almeno 2 cifre.

Indicando con N' il numero che si ottiene da N cancellando la cifra delle unità a_0, vale a dire:

$$N' = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1,$$

possiamo scrivere: $N = N' \cdot 10 + a_0$.

Ora, sappiamo che N è divisibile per 7 se vale la seguente congruenza: $N \equiv_7 0$, ossia se risulta:

$$N' \cdot 10 + a_0 \equiv_7 0.$$

A questo punto, il passo decisivo consiste nel trovare il più piccolo fattore che, moltiplicato per 10, dia come prodotto un numero k tale che kN' risulti congruo di N' (mod. 7). Si trova facilmente che questo fattore è 5. Si moltiplicano quindi per 5 entrambi i membri della precedente congruenza, per cui N è divisibile per 7 se risulta: $(N' \cdot 10 + a_0) \cdot 5 \equiv_7 0$, cioè $50\, N' + 5\, a_0 \equiv_7 0$.

Confermato che $50\, N' \equiv_7 N'$, possiamo concludere che N è divisibile per 7 se $N'+5\, a_0 \equiv_7 0$, cioè se è divisibile per 7 il numero $N' + 5\, a_0$.

Ossia, detto a parole e tenendo presente che N' è il numero delle decine di N ed a_0 è quello delle sue unità:

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 7:
Il numero N è divisibile per 7 se lo è il numero formato dalle sue decine più il quintuplo delle sue unità.

Applicando questo criterio, però, spesso si ottiene una situazione che non permette ancora di stabilire agevolmente se il numero assegnato è divisibile per 7 o se non lo è. È necessario allora ripetere il procedimento, eventualmente anche più volte, fino ad ottenere un numero che permetta di dare una facile risposta.

Sia, per esempio, il numero N=394.758.

N è divisibile per 7 se lo è $N_1 = 39.475 + 5 \cdot 8 = 39.515$;

N_1 è divisibile per 7 se lo è $N_2 = 3.951 + 5 \cdot 5 = 3.976$;

N_2 è divisibile per 7 se lo è $N_3 = 397 + 5 \cdot 6 = 427$;

N_3 è divisibile per 7 se lo è $N_4 = 42 + 5 \cdot 7 = 77$;

N_4 è evidentemente divisibile per 7, di conseguenza, andando a ritroso, anche N è divisibile per 7.

- Procedendo grossomodo come nel caso precedente, si possono dimostrare criteri alternativi di divisibilità per i numeri primi maggiori di 7.

Tralasciamo il criterio di divisibilità per 11 e forniamo i criteri di divisibilità per 13, per 17, per 19, per 23.

\# Dopo aver dimostrato che un numero N è divisibile per 13 se lo è il numero $N' + 4\, a_0$, dove N' è il numero delle sue decine, ne discende il seguente criterio:

.

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 13:
Il numero N è divisibile per 13 se lo è il numero formato dalle sue decine più il quadruplo delle sue unità.

Dopo aver dimostrato che un numero N è divisibile per 17 se lo è il numero $N' + 12\ a_0$, dove N' è il numero delle sue decine, ne discende il seguente criterio:

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 17:
Il numero N è divisibile per 17 se lo è il numero formato dalle sue decine più 12 volte le sue unità.

Dopo aver dimostrato che un numero N è divisibile per 19 se lo è il numero $N' + 2\ a_0$, dove N' è il numero delle sue decine, ne discende il seguente criterio:

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 19:
Il numero N è divisibile per 19 se lo è il numero formato dalle sue decine più il doppio delle sue unità.

Dopo aver dimostrato che un numero N è divisibile per 23 se lo è il numero $N' + 7\ a_0$, dove N' è il numero delle sue decine, ne discende il seguente criterio:

CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 23:
Il numero N è divisibile per 23 se lo è il numero formato dalle sue decine più 7 volte le sue unità.

- Di criteri alternativi, in realtà, ce n'è più d'uno. A titolo di esempio ne riportiamo un altro riguardante ancora la divisibilità per 7.

I criteri di divisibilità per un numero primo maggiore di 7 si ottengono con un procedimento analogo.

Ripartiamo dalla possibilità di scrivere il numero N nella forma seguente: $N = N' \cdot 10 + a_0$.

E ribadiamo che N è divisibile per 7 se vale la seguente congruenza: $N \equiv_7 0$, ossia se risulta:

$$N' \cdot 10 + a_0 \equiv_7 0.$$

A questo punto, il passo decisivo consiste nel trovare il più piccolo fattore che, moltiplicato per 10, dia come prodotto un numero k tale che kN' risulti congruo di –N' (mod. 7). Si trova facilmente che questo fattore è 2. Si moltiplicano quindi per 2 entrambi i membri della precedente congruenza, per cui N è divisibile per 7 se risulta: $(N' \cdot 10 + a_0) \cdot 2 \equiv_7 0$, cioè $20\ N' + 2\ a_0 \equiv_7 0$.

Confermato ora che $20\ N' \equiv_7 -N'$, possiamo concludere che N è divisibile per 7 se $-N' + 2\ a_0 \equiv_7 0$, ossia se è divisibile per 7 il numero $N' - 2\ a_0$. Dunque, detto a parole:

SECONDO CRITERIO (alternativo) DI DIVISIBILITÀ PER 7:
Il numero N è divisibile per 7 se lo è il numero formato dalle sue decine meno il doppio delle sue unità.

Riprendiamo lo stesso esempio precedente, vale a dire il numero N=394.758.
N è divisibile per 7 se lo è $N_1 = 39.475 - 2 \cdot 8 = 39.459$;
N_1 è divisibile per 7 se lo è $N_2 = 3.945 - 2 \cdot 9 = 3.927$;
N_2 è divisibile per 7 se lo è $N_3 = 392 - 2 \cdot 7 = 378$;
N_3 è divisibile per 7 se lo è $N_4 = 37 - 2 \cdot 8 = 21$;
N_4 è evidentemente divisibile per 7, di conseguenza, andando a ritroso, anche N è divisibile per 7.

5. Mostriamo adesso brevemente, per concludere, come i criteri di divisibilità non siano invarianti al variare del sistema di numerazione.

È sufficiente qualche esempio.

- Sistema di numerazione in base 2.

Il numero 111 rappresenta il numero "sette", che non è divisibile per "tre" e tuttavia la somma delle sue cifre è esattamente "tre".

Per contro, il numero 110, che rappresenta il numero “sei”, divisibile per “tre”, è tale per cui la somma delle sue cifre, che è “due”, non è divisibile per “tre”.

- Sistema di numerazione in base 3.

Il numero 10 presenta come ultima cifra un numero pari e tuttavia, rappresentando il numero “tre”, non è divisibile per “due”.

Per contro, il numero 11, rappresentando il numero “quattro”, è divisibile per “due” e tuttavia la sua ultima cifra non è pari.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Armando Chiellini – Roberto Giannarelli, *L’esame orale di matematica nei concorsi a cattedre di scuole secondarie*, Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1962, pagg. 96-102.

[2] Yakov Perelman, *Algebra ricreativa*, Collana “Sfide matematiche”, Milano, RBA Italia, 2008.

[3] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.