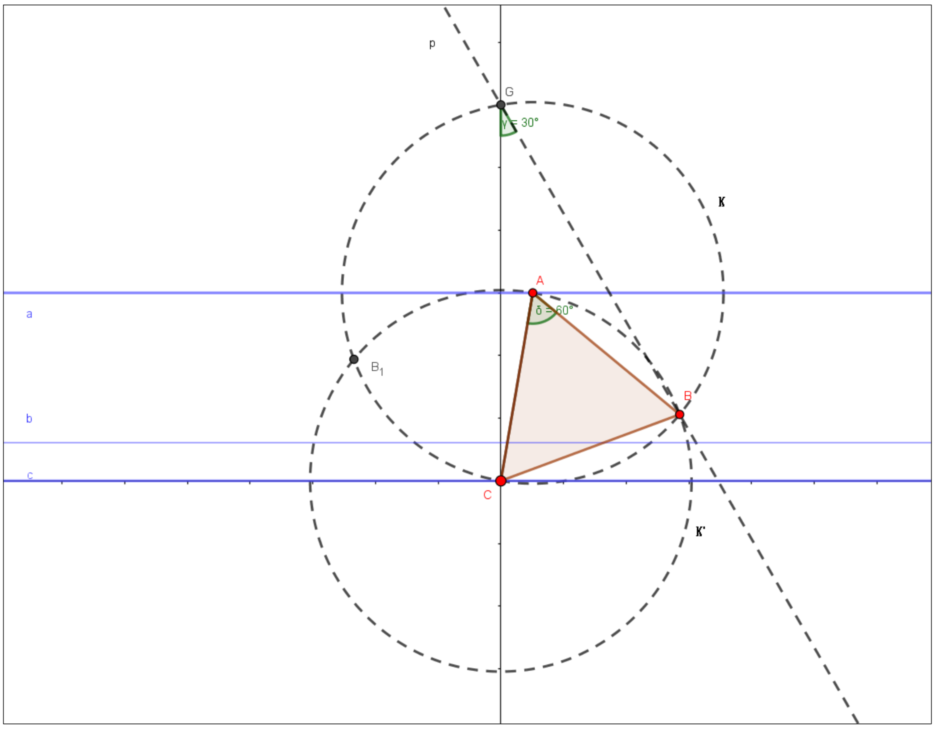
Metodo dei luoghi geometrici

Date tre rette parallele a, b, c, esiste sempre un triangolo equilatero i cui vertici appartengono ciascuno a una delle tre rette ?

Il quesito è tratto dal test di ammissione alla Scuola Normale Superiore (Anno accademico 1967—1968) e ancora oggi suscita interesse per la varietà di approcci risolutivi

Soluzione

La risposta è<<Sì>> e si deduce facilmente provando a costruire la figura con l'ausilio del software Geogebra , procedendo in tre fasi: Esplorazione-Congettura- Dimostrazione



Costruzione con Geogebra

A. *Esplorazione*

- Siano a , b e c tre e rette parallele Sia d la distanza tra a e c, sia d_1 la distanza tra c e b, e d_2=d-d_1 = distanza tra a e b
- Scelto un punto A sulla retta a e un punto C sulla retta c , si costruisce un triangolo equilatero di lato AC. Il terzo vertice sarà pertanto, uno dei due punti B e B_1 ,comuni alle due circonferenze K e K' rappresentate in figura , di raggio uguale ad $\overline{AC}$ e centro A e C , rispettivamente.
- Mantenendo fisso C e facendo variare A su a, si osserva (e si dimostra facilmente) che la circonferenza K_1 passa sempre per C e per il punto G simmetrico di C rispetto alla retta a (appartenente alla perpendicolare condotta da C alle due rette e distante $2d$ da C).

Congettura

Avendo trascurato la condizione di appartenenza alla retta b, il punto B (o il punto B_1)assume infinite posizioni al variare di A sulla retta a e può giacere sia nel semipiano che si trova al di sopra della retta b, sia al disotto.

Esiste , pertanto, almeno una posizione di A per cui il punto B giace sulla retta b.

Dimostrazione

Al variare di A sulla retta a, il triangolo BCG inscritto nella circonferenza K ha sempre un lato coincidente con il segmento CG e l'angolo di vertice A di ampiezza 30° , essendo angolo alla circonferenza corrispondente ad un angolo al centro di ampiezza 60°.

Pertanto , il luogo geometrico descritto dal terzo vertice B è una retta p che passa per G e forma un angolo di 30° con la retta GC , mentre quello descritto dal punto B_1è la retta q, simmetrica di p rispetto alla retta GC

Il terzo vertice B ($B_{1)}$ è l'intersezione di p (di q) con la terza retta b

Soluzione analitica

In un riferimento cartesiano in cui l'asse x coincide con la retta c e l'asse y con la retta CG, le tre rette parallele hanno equazione

$$retta\ \ a\ : \qquad y = d$$

$$retta\ \ b : \qquad y = d_1$$

$$retta\ \ c: \qquad y = 0$$

il punto A ha coordinate (k, d) , $con\ k\ parametro\ reale$

L'equazione della circonferenza K è $(x - k)^2 + (y - d)^2 = k^2 + d^2$ ovvero

$$x^2 + y^2 - 2kx - 2dy = 0$$

I suoi punti di incontro con l'asse y sono $C(0,0)\ \ e\ \ G\ (0,2d)$

L'equazione della circonferenza K ' è $x^2 + y^2 = k^2 + d^2$ e i punti comuni alle due circonferenze sono

$$B\left(\frac{\sqrt{3}d+k}{2}\ ,\frac{d-\sqrt{3}k}{2}\right)\ \ B_1\left(\frac{-\sqrt{3}d+k}{2}\ ,\frac{d+\sqrt{3}k}{2}\right)$$

Il primo appartiene alla retta b per $k = \frac{d-2d_1}{\sqrt{3}}$, il secondo per $k = \frac{-d+2d_1}{\sqrt{3}}$

Eliminando il parametro k si osserva che il luogo descritto punto B è la retta di equazione $y = -\sqrt{3}x + 2d,$

mentre quello descritto da B_1è la retta di equazione $y = \sqrt{3}x + 2d$

Le coordinate dei tre vertici sono

$A(\frac{d-2d_1}{\sqrt{3}}$; d) B $(\frac{2d-d_1}{\sqrt{3}};\ d_1)$ $C(0;0)$

$A(\frac{-d+2d_1}{\sqrt{3}}$; d) $B_1(\frac{d_1-2d}{\sqrt{3}};\ d_1)$ $C(0;0)$

La lunghezza del lato del triangolo sarà $l = 2\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+d_1d_2}{3}}$

Soluzione trigonometrica

Indicando con α l'ampiezza dell'angolo $E\hat{C}B$, si impone:

$$\begin{cases} l\sin\alpha = & d_1 \\ l\sin(60° - \alpha) = & d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l\sin\alpha = & d_1 \\ l(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha) = & d_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} l\sin\alpha = & d_1 \\ l\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{d_1}{2} = & d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l\sin\alpha = & d_1 \\ l\cos\alpha = & \left(d_2 + \frac{d_1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

quadrando e sommando

$$l^2 = \frac{4}{3}\left({d_1}^2 + {d_2}^2 + d_1 d_2\right)$$