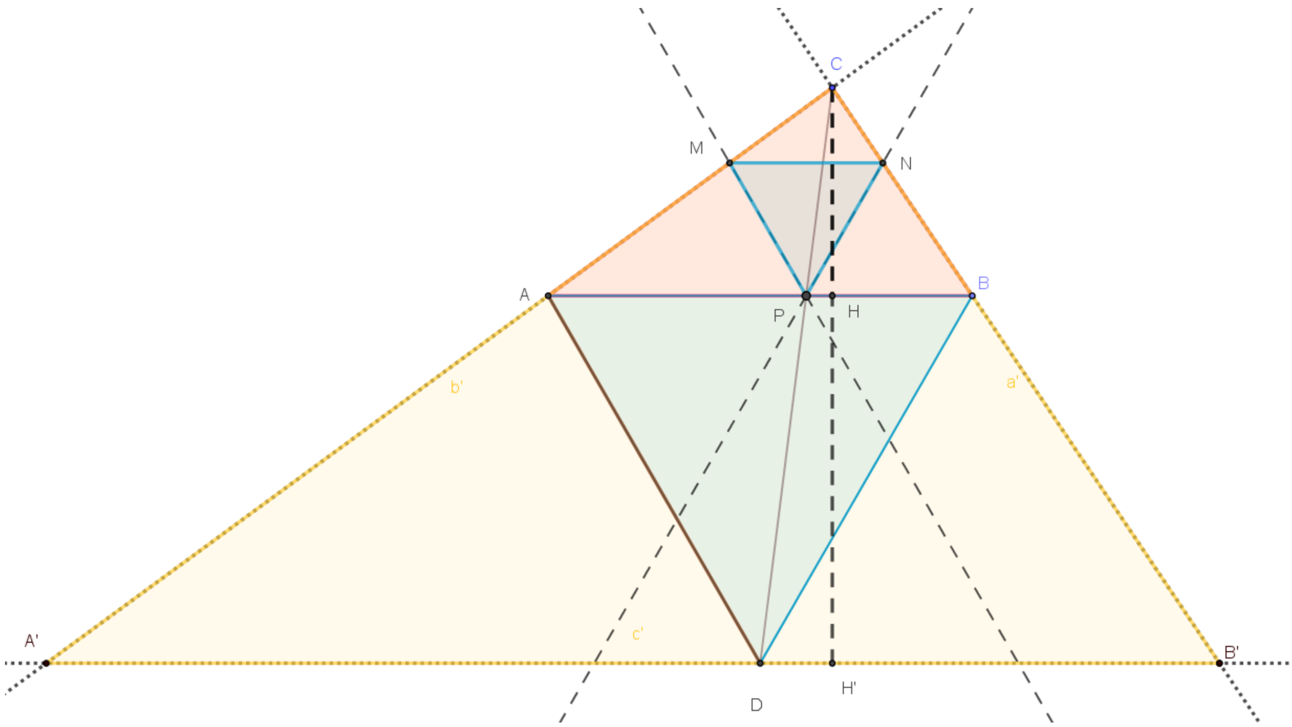
Un esempio del metodo del problema contrario

Problema

È dato un triangolo ABC in cui gli angoli in A e in B sono acuti.

Inscrivere in esso un triangolo equilatero con un lato parallelo ad AB.



Il problema proposto permette un procedimento molto semplice per la soluzione sintetica del problema inverso: costruzione di un triangolo circoscritto a un triangolo equilatero assegnato, con un lato parallelo a un lato di quest'ultimo

1. Disegnato il triangolo ABC, si costruisce il triangolo equilatero ABD nel semipiano opposto, rispetto alla retta AB.
   Si traccia la retta r passante per D e parallela ad AB.
   Si prolungano i lati CA e CB fino ad incontrare la retta r nei punti A' e B', rispettivamente.
   Il triangolo $A'B'C$, simile ad ABC, risulta circoscritto al triangolo equilatero ABD.

2. La retta CD incontra il segmento AB nel punto P e lo divide in parti proporzionali a $A'D$ e DB'

Infatti , essendo tra loro simili i triangoli CAP e $CA'D$ e, analogamente , i triangoli CBP e $CB'D$, si ha

$A'D : AP = CD : CP$ $\qquad$ $DB' : PB = CD : CP$

da cui si deduce che $A'D : AP = DB' : PB$

I due triangoli ABC e $A'B'C$ si corrispondono nell'omotetia $\boldsymbol{\Omega}$ di centro C e rapporto

$$k = \frac{\overline{CD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CH'}}{\overline{CH}}$$

dove CH' e CH sono le altezze dei triangoli $A'B'C$ e $A\,BC$ rispettivamente, con

$\overline{CH'} = \overline{CH} + \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{3}$

Per essere certi che il punto D cada all'interno del segmento A'B' e il punto P all'interno del segmento AB, basta osservare che il punto D potrebbe coincidere con uno degli estremi o sarebbe esterno al lato A'B' solo se uno dei due angoli alla base del triangolo ABC avesse un' ampiezza uguale o maggiore di $120°$*, contro l'ipotesi che entrambi siano acuti.*

3. Dal punto P si traccia la retta parallela al segmento AD che incontra

in M il segmento AC e la retta parallela a BD, che incontra in N il segmento CB.

È facile verificare che , nella stessa omotetia $\boldsymbol{\Omega}$, il triangolo ABD è il trasformato di MNP il quale , pertanto, è equilatero ed ha il lato MN parallelo ad AB.

Il triangolo PMN soddisfa le condizioni richieste nel testo.
Essendo noto il rapporto di omotetia si può anche determinare la lunghezza del lato.