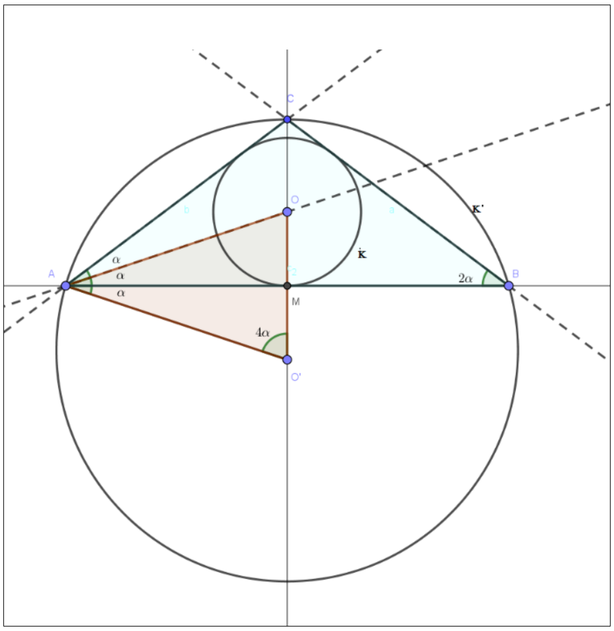
Un esempio di processo risolutivo

Problema

Il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è circoscritto a una circonferenza K di raggio r unitario. Si determini il raggio della circonferenza K' circoscritta al triangolo, sapendo che la distanza tra i due centri è uguale a $2r$

Soluzione

La costruzione della figura, ottenuta facilmente con riga e compasso oppure utilizzando gli strumenti fondamentali di un software(Geogebra), suggerisce una soluzione geometrica, senza ricorrere a laboriosi calcoli algebrici o trigonometrici.



1. Si costruisce un triangolo ABC circoscritto ad una circonferenza di raggio r unitario:
   Si disegni la circonferenza K di centro O e raggio unitario, su questa si scelga un punto M e sia la retta OM l'asse di simmetria della figura
   - Poiché retta t perpendicolare al raggio OM è tangente alla circonferenza , ad essa appartiene il lato AB del triangolo isoscele ABC che si vuole costruire
2. Siano A e B due punti di t simmetrici rispetto ad M.
   - Le rette AO e BO sono bisettrici, rispettivamente, dell'angolo $M\hat{A}C$ e dell'angolo $M\hat{B}C$
   - Le rette dei lati AC e BC sono le simmetriche di AB rispetto ad AO e a BO e individuano il terzo vertice del triangolo.

3. Si costruisce la circonferenza K' di centro O' e raggio $R = \overline{OO'}$,passante per i tre vertici del triangolo e, supponendo risolto il problema, si cerca una conseguenza dell'ipotesi
$$\overline{OO'} = 2r.$$

4. Si osserva che in questa ipotesi, M è il punto medio di OO' e quindi il triangolo AOO' è isoscele sulla base OO'
5. Si ha $O\widehat{O'}A = 2C\hat{B}A = 2C\hat{A}B$ in quanto il primo è angolo al centro e il secondo angolo alla circonferenza sullo stesso arco CA
6. Nel triangolo isoscele OAO', l'angolo di vertice A è congruente all'angolo $C\hat{A}B$ in quanto entrambi corrispondono al doppio dell'angolo $M\hat{A}O$; pertanto l'angolo al vertice è la metà di ciascuno degli angoli alla base e la sua ampiezza sarà $\frac{\pi}{5}$.
7. Poiché, quindi, gli angoli del triangolo OAO' misurano $\frac{\pi}{5}, \frac{2}{5}\pi, , \frac{2}{5}\pi$ esso è un triangolo aureo e il rapporto $\frac{O'A}{OO'}$ è $uguale\ al\ numero\ aureo$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Essendo $\boldsymbol{\overline{OO'} = 2}$ ***risulta*** $\boldsymbol{O'A = R = 1 + \sqrt{5}}$

Il processo risolutivo si arresta al punto 7 se il solutore conosce le proprietà del triangolo aureo (la base è sezione aurea del lato), altrimenti si dovrà continuare col nuovo problema e determinare il rapporto tra i segmenti O'A e OO'. Si sfrutta, in questo caso, la similitudine fra il triangolo aureo e quello che si ottiene tracciando la bisettrice di uno degli angoli alla base.

$$\overline{O'A} = R$$
$$\overline{OO'} = \overline{O'P} = \overline{AP} = 2$$
$$R : 2 = 2 : (R - 2) \rightarrow R = 1 + \sqrt{5}$$