Facce, vertici e spigoli di un poliedro

di Antonino Giambò

1. In un poligono (convesso o concavo), come sanno tutti gli studenti, il numero dei vertici e quello dei lati coincidono. In genere, non è così in un poliedro, raffrontando vertici, spigoli e facce. Esistono, tuttavia, relazioni interessanti fra i vertici, gli spigoli e le facce di un poliedro.

Una di queste relazioni fu scoperta e dimostrata per la prima volta dallo svizzero Leonhard Euler (italianizzato: Leonardo Eulero, 1707-1783) ed è qui esposta, benché in termini leggermente diversi da quelli di Eulero, ma sostanzialmente equivalenti:

In un poliedro convesso, il numero F delle facce aumentato del numero V dei vertici supera di 2 unità il numero S degli spigoli.

Vale a dire:

(1) $$\mathbf{F + V = S + 2}\,.$$

La formula è da molti considerata come la seconda più bella formula della matematica [(1)].

Sappiamo della scoperta di Eulero in virtù di una lettera da lui inviata, il 14 novembre 1750, all'amico Christian Goldbach (matematico tedesco, 1690-1764), nella quale annuncia per l'appunto la suddetta relazione.

La formula, in realtà, fu resa nota nel 1752 quando comparve all'interno di un'opera di Eulero dal titolo *Elementa doctrinae solidorum*.

Ma, ritornando alla lettera che Eulero inviò a Goldbach, a proposito della formula egli scrive le seguenti parole: "*Mi sorprende che quelle proprietà generali sulla geometria dei solidi, per quanto ne sappia, non sono state osservate da nessun altro*".

Ebbene, Eulero si sbagliava.

Prima di lui un altro matematico, il francese René Descartes (italianizzato: Renato Cartesio, 1596-1650) aveva enunciato qualcosa di simile alla formula di Eulero.

Così riferisce il matematico e storico della matematica Gino Loria (1862-1954), precisando che questo risulta da un frammento attribuito a Cartesio, pubblicato solo nel 1860 [1].

Joaquín Navarro Sandalinas [3] aggiunge che Cartesio avrebbe scoperto una proprietà che implica la formula di Eulero nel 1649, ma morì prima di poterla pubblicare.

Miquel Albertí Palmer, afferma però che « nel 1630 il filosofo francese dimostrò una relazione fondamentale per ottenere la relazione che alcuni considerano equivalente a quella di Eulero » [2, pag. 143].

Comunque sia andata, Eulero effettivamente non poteva sapere di questa scoperta di Cartesio. Ma proprio in considerazione di questo fatto non manca chi denomina *formula di Eulero-Cartesio* la formula in questione.

Oltre alla relazione (1) ci sono altre relazioni interessanti che legano facce, vertici e spigoli di un poliedro.

In questo articolo ne mostrerò un paio, relative ai poliedri convessi: sono funzionali ad alcune considerazioni che vedremo in seguito.

Farò pure un cenno ad una formula che riguarda invece i poliedri concavi.

Ricordo, per ogni evenienza, le definizioni di poliedro, di poliedro convesso e di poliedro concavo.

Un *poliedro* è una parte finita di spazio limitata da poligoni (le sue *facce*) tali che due qualsiasi di essi non siano complanari e ogni loro lato (*spigolo*) sia comune a due e soltanto due di essi.

Se il piano di ciascuna faccia lascia da una stessa parte tutte le altre facce del poliedro, questo si definisce *convesso* (figura 1). Se, al contrario, esiste almeno una faccia il cui piano taglia il poliedro, questo si definisce *concavo* (figura 2).

---

1 Quella che è ritenuta la formula più bella è conseguenza di un'altra celebre formula di Eulero ed è la seguente: $e^{\pi i}+1=0$.

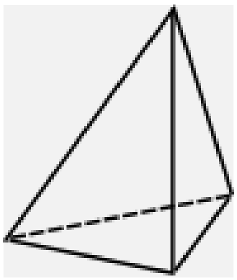
figura 1

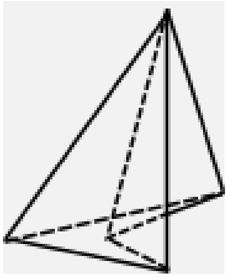
figura 2

2. Andiamo adesso a dimostrare la formula (1).

Lo faremo con un procedimento diverso da quello seguito da Eulero, ma con considerazioni afferenti ad un ambito della Matematica che lo stesso Eulero contribuì a creare, denominato *Analysis Situs* [2], ma più conosciuto come *Topologia*.

Si tratta, in realtà, di una dimostrazione che il matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857) dimostrò nel 1811, all'età di poco più di 20 anni, anche se l'articolo in cui essa figura, dal titolo *Recherches sur les polyèdres*, fu pubblicato due anni dopo, nel 1813, nel *Journal de l'École Polytechnique* [4, pag. 44].

DIMOSTRAZIONE (di Cauchy).

Premetto che del poliedro non interessano le misure dei suoi elementi ma solo le loro posizioni reciproche.

Considerato allora un generico poliedro (per esempio il parallelepipedo ABCDEFGH – figura 3a – ma il discorso non perde di generalità), supponiamo di eliminare una sua faccia (per esempio ABCD) e di schiacciarlo in modo da distenderlo in un piano (figura 3b) adattando, se occorre, le lunghezze dei suoi spigoli. In questa maniera il numero F delle sue facce è diminuito di 1, ma il numero V dei suoi vertici e quello S dei suoi spigoli sono rimasti invariati. Ragion per cui il numero F+V–*S* si è così ridotto di una unità.

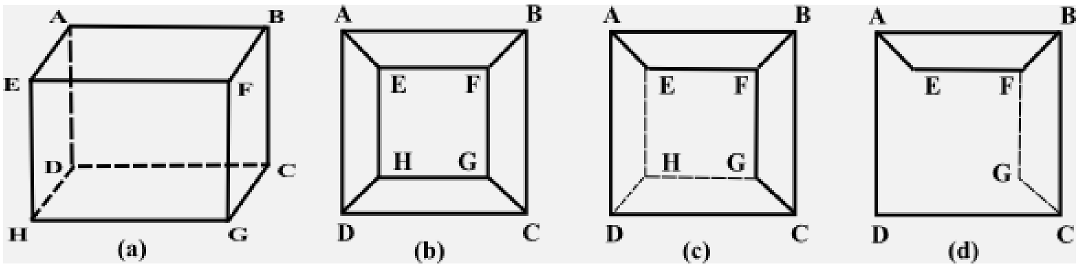

figura 3

Se adesso nella figura "appiattita" eliminiamo un vertice interno (per esempio H – figura 3c), vengono contemporaneamente eliminati gli N spigoli che concorrono in esso (nel caso specifico: HD, HE, HF) e le N facce che hanno quel vertice in comune (nel caso specifico: HDAE, HEFG, HDCG), ma compare nello stesso tempo una faccia che prima non c'era (nel caso specifico: AEFGCD). Pertanto, il numero F+V–S, in seguito alla soppressione di un vertice interno, diventa:

$$(\mathrm{F}-\mathrm{N}+1)+(\mathrm{V}-1)-(\mathrm{S}-\mathrm{N}), \quad \text{vale a dire:} \quad \mathrm{F}+\mathrm{V}-S,$$

e quindi rimane invariato.

Lo stesso accade con la soppressione di un altro vertice interno (ad esempio G – figura 3d) e via via con l'eliminazione di tutti i vertici interni.

Insomma, sopprimendo tutti i vertici interni la figura che rimane ha lo stesso numero F+V–S dell'originario poliedro "appiattito". Ma questa figura è adesso un poligono di M lati (nel caso specifico: il quadrilatero ABCD) e perciò per esso risulta: F=1, V=M, S=M. Di conseguenza: F+V–S=1.

D'altro canto, per l'originario poliedro "appiattito" il numero F+V–*S* è ridotto di una unità rispetto al

[2] *Analysis Situs* è il titolo di un articolo che il matematico francese Henri Poincaré (1854-1912) pubblicò nel 1895 nel *Journal de l'École Polytechnique* (acronico JEP).

poliedro assegnato. Per tale poliedro è dunque: F+V–S=2. Da qui segue la relazione di Eulero.

Detto di passata, il numero:

$$\chi = \mathrm{F} + \mathrm{V} - \mathrm{S}$$

è denominato *caratteristica di Eulero* per i poliedri convessi.

È quello che si definisce un *invariante topologico*, cioè una proprietà di una superficie che rimane invariata indipendentemente dalle trasformazioni alle quali è sottoposta.

3. Altre due relazioni, sempre relative a un poliedro convesso, sono le seguenti:

a) **La somma dei numeri dei lati delle facce è uguale al doppio del numero degli spigoli**.

In formula, se F è il numero delle facce e se sono $\mathrm{N_1, N_2, \dots, N_F}$ i numeri dei lati delle F facce, e se infine è S il numero degli spigoli, si ha allora:

$$\mathbf{N_1 + N_2 + \ \dots + N_F = 2\ S}\ .$$

b) **La somma dei numeri degli spigoli convergenti in ogni vertice è uguale al doppio del numero degli spigoli**.

In formula, se V è il numero dei vertici e se sono $\mathrm{M_1, M_2, \dots, M_V}$ i numeri degli spigoli che convergono nei V vertici, e se è S il numero degli spigoli, si ha allora:

$$\mathbf{M_1 + M_2 + \ \dots + M_V = 2\ S}\ .$$

DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE a).

È sufficiente costatare che ogni lato di ciascuna faccia, ossia ogni spigolo del poliedro, è comune a due facce dello stesso poliedro. Per cui, sommando i numeri dei lati di ogni faccia, si ottiene un numero – $\mathrm{N_1+N_2+ \dots +N_F}$ – che è uguale al doppio del numero degli spigoli del poliedro.

DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE b).

È analoga alla precedente. Basta costatare che ogni spigolo del poliedro congiunge due vertici dello stesso poliedro. Per cui, sommando i numeri degli spigoli che convergono in ogni vertice, si ottiene un numero – $\mathrm{M_1 + M_2 + \ \dots + M_V}$ – che è uguale al doppio del numero degli spigoli del poliedro.

4. Le suddette proprietà permettono di spiegare qualche interessante curiosità sui poliedri convessi.

Sappiamo intanto che esistono poliedri le cui facce sono tutte triangoli equilateri o tutte quadrati o tutte pentagoni regolari. Sono i *poliedri regolari* che, com'è noto, sono in numero di 5.

Le loro caratteristiche, relativamente ai numeri delle loro facce, dei vertici e degli spigoli, sono note a tutti gli studenti, ma le riporto ugualmente nella seguente tabella (tabella 1):

Poliedro	Facce	Vertici	Spigoli
Tetraedro	4 triangoli	4	6
Esaedro	6 quadrati	8	12
Ottaedro	8 triangoli	6	12
Dodecaedro	12 pentagoni	20	30
Icosaedro	20 triangoli	12	30

tabella 1

Si pongono alcuni quesiti interessanti. Ma prima una necessaria riflessione.

Sappiamo che non esistono poliedri regolari le cui facce siano poligoni regolari uguali di almeno 6 lati poiché gli angoli che convergono in uno stesso vertice assommerebbero un angolo almeno uguale ad un angolo giro e questo non permette di ottenere un poliedro.

Ma forse potrebbero esistere:

a) poliedri le cui facce siano poligoni non regolari di almeno 6 lati,

b) oppure in parte poligoni regolari di almeno 6 lati e in parte poligoni regolari di al più 5 lati.

Indaghiamo con interrogativi appositi.

- QUESITO 1: Esistono poliedri convessi le cui facce siano poligoni non regolari dello stesso numero N di lati, con N≥6?

RISPOSTA. In virtù della relazione a), tenendo presente che adesso ogni faccia ha lo stesso numero di lati, cioè N, la somma dei numeri dei lati di ogni faccia di un ipotetico poliedro siffatto sarebbe NF, dove F è il numero delle facce. Si avrebbe dunque:

$$\mathrm{N\,F} = 2\,\mathrm{S} \quad \text{ovvero:} \quad \mathrm{F} = \frac{2}{\mathrm{N}}\,\mathrm{S}\,.$$

Parimenti, in virtù della relazione b), tenendo presente che in ogni vertice concorrono almeno tre spigoli, la somma dei numeri degli spigoli che concorrono in uno stesso vertice è almeno 3 V. Ossia: $M_1+M_2+\ldots+M_V \geq 3V$. Per cui, essendo comunque $M_1+M_2+\ldots+M_V = 2\,S$, si avrebbe:

$$2\,\mathrm{S} \geq 3\,\mathrm{V} \quad \text{ovvero:} \quad \mathrm{V} \leq \frac{2}{3}\,\mathrm{S}\,.$$

Riprendendo adesso la formula di Eulero e sostituendo in essa i valori trovati per F e V, si otterrebbe:

$$\frac{2}{\mathrm{N}}\mathrm{S} + \frac{2}{3}\mathrm{S} \geq \mathrm{S} + 2, \quad \text{ossia:} \quad \frac{6-\mathrm{N}}{6\,\mathrm{N}} \cdot \mathrm{S} \geq 6.$$

Conclusione ovviamente assurda, dal momento che il primo membro dell'ultima disuguaglianza è nullo (per N=6) o negativo (per N>6).

Non esistono quindi poliedri convessi le cui facce siano tutte poligoni non regolari dello stesso numero N di lati, con N≥6.

- QUESITO 2: Ammesso che un poliedro convesso abbia un determinato numero F_N di facce della forma di poligoni regolari uguali di N lati, con N≥6:
  - è possibile che altre sue facce siano triangoli equilateri uguali?
  - in caso affermativo qual è il numero di queste facce triangolari?

RISOLUZIONE. Sappiamo che la somma degli angoli interni di un poligono di N lati misura (N–2)·180°. Perciò ogni angolo interno del poligono, ammesso che questo sia regolare, misura:

$$\alpha = \frac{\mathrm{N}-2}{\mathrm{N}} \cdot 180°.$$

Se in uno stesso vertice di un ipotetico poliedro si richiede che concorrano un angolo di un triangolo equilatero, la cui misura è 60°, e due angoli di un poligono regolare di N lati, con N≥6, affinché la somma dei tre angoli che concorrono in quel vertice sia minore di 360°, come deve avvenire che sia, si ha:

$$60° + 2 \cdot \frac{\mathrm{N}-2}{\mathrm{N}} \cdot 180° < 360°, \quad \text{ossia, a conti fatti:} \quad \mathrm{N} < 12.$$

Per cui ci sarebbero diverse opzioni, ma ancora non sappiamo se effettivamente questi poligoni esistono.

Proseguiamo.

Tenendo presente che F_3 indica il numero delle facce triangolari (da determinare, se tale numero esiste) e F_N il numero delle facce poligonali di N lati, con N≥6 la formula di Eulero assume la seguente forma:

$$\mathrm{F_N} + \mathrm{F_3} + \mathrm{V} = \mathrm{S} + 2\,.$$

Stabilito che, in questa situazione, in ogni vertice dell'ipotetico poliedro convergono esattamente 3 spigoli poiché solamente in questo caso la somma degli angoli che convergono nel vertice è minore di un angolo giro, in virtù della precedente relazione b) risulta:

$$2\,\mathrm{S} = 3\,\mathrm{V} \quad \text{ovvero:} \quad \mathrm{V} = \frac{2}{3}\,\mathrm{S}\,.$$

Cosicché la relazione di Eulero subisce un'ulteriore modifica e diventa:

$$\mathrm{F_N} + \mathrm{F_3} + \frac{2}{3}\mathrm{S} = \mathrm{S} + 2 \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{F_N} + \mathrm{F_3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{S} + 2$$

D'altra parte, in virtù della relazione a) risulta:

$$\mathrm{N\,F_N} + 3\,\mathrm{F_3} = 2\,\mathrm{S} \quad \text{ovvero:} \quad \mathrm{S} = \frac{\mathrm{N}}{2}\,\mathrm{F_N} + \frac{3}{2}\,\mathrm{F_3}.$$

Riprendendo allora la precedente relazione di Eulero e sostituendo, si ha:

$$F_N + F_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{2}\,F_N + \frac{3}{2}\,F_3\right) + 2 \quad \text{da cui, a conti fatti, segue:} \quad F_3 = 4 + (N-6)\,F_N\,.$$

Dunque, **esistono poliedri la cui facce sono in parte triangoli equilateri uguali e in parte poligoni regolari uguali di almeno 6 lati**. Ne forniamo un esempio attraverso un teorema.

TEOREMA 1. Se è richiesto che in ogni vertice di un ipotetico poliedro concorrano un angolo di un triangolo (equilatero) e due angoli di un esagono (regolare), le facce triangolari sono 4 e altrettante sono quelle esagonali.

DIMOSTRAZIONE. Riprendendo la formula $F_3=4+(N-6)\,F_N$, essendo adesso N=6, risulta $F_3=4$. Vale a dire che 4 facce del poliedro sono triangoli equilateri uguali.

Ora questi 4 triangoli hanno complessivamente $4\times3=12$ vertici, che sono anche i vertici del poliedro, per cui $V=12$. Di conseguenza, il poliedro ha un numero S di spigoli tali che $S=\frac{3}{2}\,V=\frac{3}{2}\times12=18$.

In conseguenza della formula di Eulero, si ha dunque:

$$4 + F_6 + V = S + 2 \quad \text{o anche:} \quad F_6 = 18 + 2 - 4 - 12 = 4.$$

Queste sono pertanto le caratteristiche di questo poliedro:

$$F = 8\ (4\ \text{triangoli} + 4\ \text{esagoni}), \quad V = 12, \quad S = 18.$$

Questo poliedro è conosciuto come *tetraedro troncato*, poiché è ottenuto recidendo in modo opportuno, in un tetraedro regolare, 4 piramidi aventi i vertici propriamente detti nei vertici del tetraedro (figura 4).

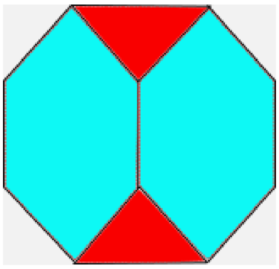

figura 4

Per esempio, la recisione può esser fatta in modo che il tetraedro troncato abbia gli spigoli uguali. In questo caso il poliedro rientra in una categoria di poliedri che a volte sono denominati *poliedri pseudo-regolari*.

- QUESITO 3: Ammesso che un poliedro convesso abbia un determinato numero F_N di facce della forma di poligoni regolari uguali di N lati, con $N\geq6$:
- è possibile che altre sue facce siano quadrati uguali?
- in caso affermativo qual è il numero di queste facce quadrate?

RISOLUZIONE. Come nel caso precedente, se in uno stesso vertice di un ipotetico poliedro si richiede che concorrano un angolo di un quadrato, la cui misura è 90°, e due angoli di un poligono regolare di N lati, con $N\geq6$, affinché la somma dei tre angoli che concorrono in quel vertice sia minore di 360°, come deve avvenire che sia, si ha:

$$90° + 2\cdot\frac{N-2}{N}\cdot180° < 360°, \quad \text{ossia, a conti fatti:} \quad N < 8.$$

Per cui, anche in questo caso ci sarebbero diverse opzioni, ma ancora non sappiamo se effettivamente questi poligoni esistono.

Proseguiamo.

Tenendo presente che F_4 è il numero delle facce quadrate (da determinare, se tale numero esiste) e F_N è il numero delle facce poligonali di N lati, con $N\geq6$, la formula di Eulero assume la seguente forma:

$$F_N + F_4 + V = S + 2\,.$$

Anche adesso, come prima, in ogni vertice dell'ipotetico poliedro convergono esattamente 3 spigoli, per cui la relazione di Eulero subisce un'ulteriore modifica e diventa:

$$F_N + F_4 = \frac{1}{3}\,S + 2\,.$$

D'altra parte, in virtù della relazione a) risulta:

$$N\,F_N + 4\,F_4 = 2\,S \quad \text{ovvero:} \quad S = \frac{N}{2}\,F_N + 2\,F_4.$$

Riprendendo allora la precedente relazione di Eulero e sostituendo, si ha:

$$F_N + F_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{2} F_N + 2 F_4\right) + 2 \quad \text{da cui, a conti fatti, segue:} \quad F_4 = 6 + \frac{N-6}{2} F_N .$$

Dunque, **esistono poliedri la cui facce sono in parte quadrati uguali e in parte poligoni regolari uguali di almeno 6 lati**. Come prima, ne forniamo un esempio attraverso un teorema.

TEOREMA 2. Se è richiesto che in ogni vertice di un ipotetico poliedro concorrano un angolo di un quadrato e due angoli di un esagono (regolare), le facce quadrate sono 6 mentre sono 8 quelle esagonali.

DIMOSTRAZIONE. Riprendiamo la formula $F_4 = 6 + \frac{N-6}{2} F_N$. Siccome adesso N=6, risulta F_4=6. Vale a dire che 6 facce del poliedro sono quadrati uguali.

Ora questi 6 quadrati hanno complessivamente $6\times4=24$ vertici, che sono anche i vertici del poliedro, per cui V=24. Di conseguenza, il poliedro ha un numero S di spigoli tali che $S=\frac{3}{2}\ V=\frac{3}{2}\times24=36$.

In conseguenza della formula di Eulero, si ha dunque:

$$6 + F_6 + V = S + 2 \quad \text{o anche:} \quad F_6 = 36 + 2 - 6 - 24 = 8.$$

Queste sono pertanto le caratteristiche di questo poliedro:

$$F = 14\ (6\ \text{quadrati} + 8\ \text{esagoni}), \quad V = 24, \quad S = 36.$$

Questo poliedro è conosciuto come *ottaedro troncato*, poiché è ottenuto recidendo in modo opportuno, in un ottaedro regolare, 6 piramidi aventi i vertici propriamente detti nei vertici del tetraedro (figura 5).

È anch'esso un poliedro pseudo-regolare qualora la recisione venga fatta in modo che gli spigoli dell'ottaedro troncato siano uguali.

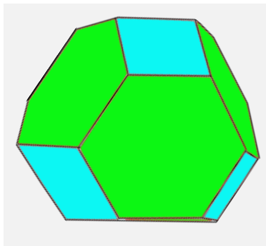

figura 5

QUESITO 4: Ammesso che un poliedro convesso abbia un determinato numero F_N di facce della forma di poligoni regolari uguali di N lati, con N≥6:

- è possibile che altre sue facce siano pentagoni regolari uguali?
- in caso affermativo qual è il numero di queste facce pentagonali?

RISOLUZIONE. Tenendo presente che F_5 è il numero delle facce pentagonali (da determinare, se tale numero esiste) e F_N è il numero delle facce poligonali, la formula di Eulero assume la seguente forma:

$$F_N + F_5 + V = S + 2 .$$

Di nuovo, come prima, in ogni vertice dell'ipotetico poliedro convergono esattamente 3 spigoli, per cui la relazione di Eulero subisce un'ulteriore modifica e diventa:

$$F_N + F_4 = \frac{1}{3} S + 2 .$$

D'altra parte, in virtù della relazione a) risulta:

$$N\,F_N + 5\,F_5 = 2\,S \quad \text{ovvero:} \quad S = \frac{N}{2} F_N + \frac{5}{2} F_5.$$

Riprendendo allora la precedente relazione di Eulero e sostituendo, si ha perciò:

$$F_N + F_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{2} F_N + \frac{5}{2} F_5\right) + 2 \quad \text{da cui, a conti fatti, segue:} \quad F_5 = 12 + (N-6)\,F_N .$$

Dunque, **esistono poliedri la cui facce sono in parte pentagoni regolari uguali e in parte poligoni regolari uguali di almeno 6 lati**. Ne vediamo un esempio attraverso un teorema.

TEOREMA 3. Se è richiesto che in ogni vertice di un ipotetico poliedro concorrano un angolo di un pentagono (regolare) e due angoli di un altro poligono (regolare) avente almeno 6 lati, questo poligono può essere solamente un esagono. Inoltre, le facce pentagonali sono 12 e quelle esagonali sono 20.

DIMOSTRAZIONE. Se in uno stesso vertice di un ipotetico poliedro si richiede che concorrano un angolo di un pentagono regolare, la cui misura è 108°, e due angoli di un poligono regolare di N lati, con N≥6, affinché la somma dei tre angoli che concorrono in quel vertice sia minore di 360°, come deve avvenire che sia, deve risultare:

$$108° + 2 \cdot \frac{N-2}{N} \cdot 180° < 360°, \quad \text{ossia, a conti fatti:} \quad N < \frac{20}{3}, \quad \text{e quindi} \quad N < 7.$$

Per cui il poligono può essere solamente un esagono.

In questo caso, riprendendo la formula $F_5=12+(N-6)\,F_N$, essendo N=6, risulta $F_5=12$. Vale a dire che 12 facce del poliedro sono pentagoni regolari uguali.

Ora questi 12 pentagoni hanno complessivamente $12\times5=60$ vertici, che sono anche i vertici del poliedro, per cui $V=60$. Di conseguenza, il poliedro ha un numero S di spigoli tali che $S=\frac{3}{2}\,V=\frac{3}{2}\times60=90$.

In conseguenza della formula di Eulero, si ha dunque:

$$5 + F_6 + V = S + 2 \quad \text{o anche:} \quad F_6 = 90 + 2 - 12 - 60 = 20.$$

In definitiva, esiste uno ed un solo poliedro le cui facce sono in parte pentagoni regolari uguali (in numero di 12) ed in parte esagoni regolari uguali (in numero di 20), tali che in ogni vertice concorrano un angolo del pentagono e due angoli dell’esagono. E le caratteristiche di questo poliedro sono le seguenti:

$$F = 32, \quad V = 60, \quad S = 90.$$

Il poliedro è conosciuto come *icosaedro troncato*, poiché è ottenuto da un icosaedro regolare recidendo in modo opportuno 12 piramidi aventi i vertici nei vertici propriamente detti dell’icosaedro.

È anch’esso un poliedro pseudo-regolare qualora la recisione venga fatta in modo che gli spigoli dell’ottaedro troncato siano uguali. Il poliedro così ottenuto è probabilmente il più famoso poliedro pseudo-regolare, se non altro perché il vecchio pallone del gioco del calcio aveva la forma di un solido siffatto (figura 6).

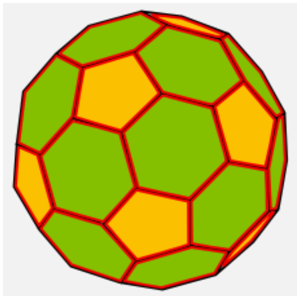

figura 6

5. Si può dimostrare che esistono poliedri pseudo-regolari tali che in ogni loro vertice concorrano 4 spigoli, 2 di un poligono regolare e 2 di un altro poligono.

Un esempio è ottenuto recidendo in modo opportuno (precisamente in modo che il poliedro troncato abbia gli spigoli uguali) o 8 piramidi in un cubo oppure 6 piramidi in un ottaedro regolare. S’intende che le piramidi hanno i vertici propriamente detti nei vertici del poliedro regolare che viene troncato.

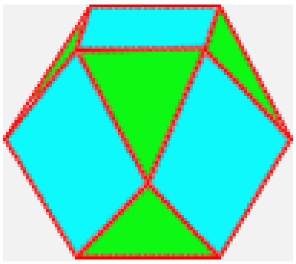

figura 7

Il solido che così si ottiene è denominato *cubottaedro* (figura 7). Le sue caratteristiche, precisato che 8 facce sono triangoli equilateri e 6 facce sono quadrati, sono le seguenti:

$$F = 14, \quad V = 12, \quad S = 24.$$

6. Riassumiamo, registrandole in una tabella (tabella 2) le caratteristiche dei quattro poliedri pseudo-regolari che abbiamo descritto nelle pagine precedenti, precisando una volta di più che le facce sono comunque poligoni regolari.

Poliedro	Facce	Vertici	Spigoli
Tetraedro troncato	4 triangoli + 4 esagoni	12	18
Ottaedro troncato	6 quadrati + 8 esagoni	24	36
Icosaedro troncato	12 pentagoni + 20 esagoni	60	90
Cubottaedro	8 triangoli + 6 quadrati	12	24

tabella 2

UNA BREVE NOTA STORICA.

I poliedri *pseudo-regolari* (o *semi-regolari*) descritti nel presente articolo fanno parte di un gruppo di 13 poliedri, il cui studio il celebre geometra Pappo di Alessandria (III-IV sec. d.C.) attribuisce allo scienziato siracusano Archimede (287 ca. – 212 a.C.), il quale ne avrebbe trattato in un'opera andata però perduta.

In quest'opera, secondo Pappo, Archimede avrebbe descritto come costruire i 13 poliedri troncati.

7. Abbiamo dunque appreso che il numero F delle facce di un poliedro convesso, il numero V dei suoi vertici e il numero S dei suoi spigoli sono legati dalla relazione di Eulero:

$$F + V = S + 2 \quad \text{o anche:} \quad F + V - S = 2\,.$$

Relazione che vale appunto per i poliedri convessi, ma non per i poliedri concavi.

A titolo di esempio, consideriamo un particolare poliedro concavo, precisamente un poliedro avente la forma della cornice di un quadro (figura 8). Non ci vuol molto a capire che si ha: $F = 16$, $V = 16$, $S = 32$.

Ragion per cui risulta:

$$F + V - S = 0$$

La differenza fra questo solido e un poliedro convesso è che il poliedro convesso non ha "buchi", mentre il solido in questione ne ha 1.

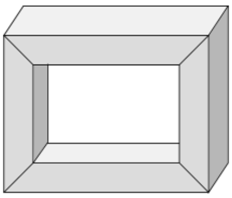

figura 8

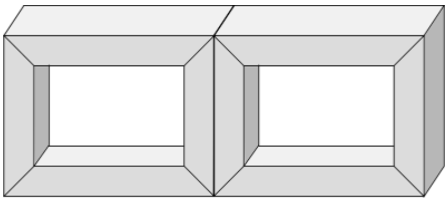

figura 9

Se poi si considera un solido avente la forma di una "doppia cornice" e perciò con 2 buchi (figura 9), si può spiegare che risulta:

$$F + V - S = -2.$$

In generale, se si considera un solido geometrico, delimitato da facce poligonali, con un numero B di buchi, vale la relazione seguente:

$$F + V - S = 2 - 2\,B\,.$$

Relazione che per B=0 si identifica chiaramente con la relazione di Eulero.

Questa relazione è stata scoperta dal matematico svizzero Simon Antoine Jean L'Huilier (1750-1840).

Detto per curiosità, a questo matematico si deve l'introduzione dell'abbreviazione "lim" per il limite, anche se fu il largo uso che ne fece il suo contemporaneo Augustin Louis Cauchy (1789-1857) che rese di dominio pubblico l'abbreviazione stessa [4].

BIBLIOGRAFIA.

[1] Gino Loria, *Analysis Situs*, documento digitalizzato reperibile in Internet.
[2] Miquel Albertí Palmer, *Cartesio*, Milano, RBA Italia, 2017.
[3] Joaquín Navarro Sandalinas, *Eulero*, Milano, RBA Italia, 2017.
[4] Carlos Oswaldo Suárez Alemán, *Cauchy*, Milano, RBA Italia, 2018.
[5] *Wikipedia*, libera enciclopedia on-line.