Nascita ed evoluzione del concetto di funzione

di Antonino Giambò

1. Agli studenti liceali è nota la definizione di funzione:

Dati due insiemi X ed Y, si dice **funzione** di X in Y ogni relazione f che a ciascun elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento $y \in Y$. Si pone $y=f(x)$.

Un'apposita figura (figura 1) consolida il concetto.

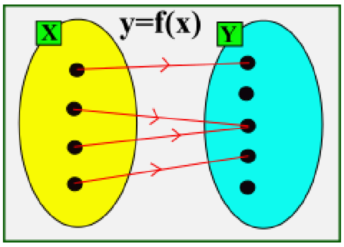

figura 1

Ora, nessuno può pensare seriamente che questa definizione sia sempre esistita.

Il concetto di funzione, come altri concetti d'altronde, non nascono fissi e immutabili, ma subiscono nel tempo variazioni e adeguamenti fino a che s'impone il concetto più conveniente.

Si pongono allora alcuni interrogativi:

- Quando e con quale definizione è nato il concetto di funzione?
- Quali variazioni ha subito nel tempo e perché?
- Quando si è imposta la definizione oggi conosciuta?

Sono interrogativi sui quali fermeremo la nostra attenzione in questo contributo, sperando di incuriosire gli studenti liceali, o quanto meno coloro che manifestano qualche interesse per la Matematica.

2. L'idea di funzione era presente, benché non in modo esplicito, presso i diversi popoli che, in varie forme, si sono occupati di Matematica: Babilonesi, Egizi, Greci, Indiani, Arabi, Cinesi.

Qualche esempio, giusto per capire di cosa parliamo.

- Il problema n. 50 del Papiro di Rhind (1) istruisce sul calcolo dell'area di un cerchio di dato diametro [2, pag. 95]:
  « Metodo per calcolare un pezzo di terra circolare di diametro 9 *khet*. Qual è la sua superficie di terra? Tu devi sottrarre la nona parte di esso (diametro), cioè 1; resto 8. Devi moltiplicare 8 otto volte; diventa 64. Questa è la sua area di terra, 64 *setat* ».
  Nella risoluzione del problema si ipotizza dunque che l'area di un cerchio di diametro 9 sia uguale a quella di un quadrato di lato 8.
  Il che fa intuire che gli Egizi erano in grado di esprimere l'area di un quadrato in funzione del suo lato. Noi scriveremmo così:
  $$A = l^2 .$$
- Ippaso di Metaponto, uno dei Pitagorici più famosi, vissuto intorno al 500 a.C., era in grado di esprimere la lunghezza della diagonale di un quadrato in funzione del lato.
  Noi scriveremmo così:
  $$d = l\sqrt{2} .$$

[1] Il Papiro di Rhind risale circa al 1650 a.C. e contiene 87 problemi che testimoniano delle conoscenze della civiltà egizia in campo matematico.

- In epoca più recente, Galileo Galilei (1564-1642) nell'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) sosteneva chiaramente che lo spazio percorso da un grave in caduta libera, partendo da fermo, è direttamente proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo. Noi scriviamo così:

$$s = \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

- La nascita del calcolo differenziale e integrale, che stava avvenendo versa la fine del Seicento per opera di Newton e Leibniz, poggiava su un concetto molto vago di funzione.

La prima formulazione esplicita del concetto di funzione nasce, verso la fine del XVII secolo, per esigenze legate alle scienze sperimentali, in particolare alla Fisica, ma è favorita da due eventi fondamentali: la disponibilità a quell'epoca di un adeguato simbolismo algebrico, che al contrario era mancato in precedenza, e lo sviluppo della Geometria Analitica, che da qualche anno era stata creata e si andava affermando e permetteva di associare una formula analitica ad una curva.

La prima definizione di funzione fu proposta dal matematico e astronomo scozzese James Gregory (1638-1675) proprio nel periodo durante il quale stava nascendo l'Analisi Infinitesimale. Egli, infatti, nella sua opera *Vera circoli et hyperbolae quadratura* (1667) si serve di un concetto di funzione che suona pressappoco così:

Una **funzione** è una quantità che si ottiene da altre quantità usando in successione operazioni algebriche.

Il concetto fu meglio precisato, nel 1718, dal matematico svizzero Jakob Bernoulli (1654-1705):

Si chiama **funzione** di una grandezza variabile una quantità composta in maniera qualunque da questa grandezza variabile e da costanti.

Questa stessa definizione fu assunta poco tempo dopo, nel 1748, da un altro matematico svizzero, Leonhard Euler (italianizzato in Leonardo Eulero, 1707-1783). La definizione figura nell'opera *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata appunto nel 1748:

Una **funzione** di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in una maniera qualunque da questa quantità variabile e da numeri o quantità costanti

Eulero precisò ulteriormente:

Se dunque x rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da x in un modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate **funzioni** di essa.

Lo stesso Eulero introdusse la notazione f(x).

Cosicché, secondo Eulero erano da considerarsi funzioni i polinomi in una variabile, il rapporto di due polinomi, il valore assoluto di un'espressione come per esempio $|x|$, le funzioni trigonometriche, eccetera.

Questa definizione di Eulero all'inizio suscitò le critiche di D'Alembert [2], il quale sosteneva che una funzione, per essere definita tale, doveva essere formata da una sola espressione analitica. Ragion per cui, per esempio, $|x|$ non poteva essere ritenuta una funzione giacché sostanzialmente era formata da due espressioni (figura 2):

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Meno che mai $|x|/x$ poteva essere ritenuta una funzione giacché il suo grafico si spezzava in due rami (figura 3):

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dopo qualche tempo, però, D'Alembert finì per dare ragione a Eulero e accettare la sua definizione.

---

2 Jean Baptiste Le Ronde, detto D'Alembert, scienziato e filosofo francese, 1717-1783.

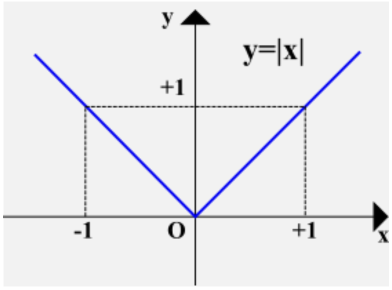

figura 2

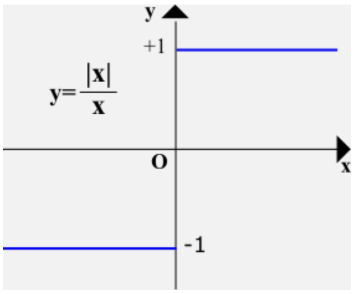

figura 3

Dunque, con l'introduzione del piano cartesiano, ogni funzione y=f(x) è rappresentata da una curva e ogni curva (che non presenta rami che "ritornano" indietro) è l'immagine grafica di una funzione y=f(x).

Ora, però, proprio questa caratteristica, che aveva agevolato la definizione formulata da Bernoulli e ripresa da Eulero, fu la causa di una piccola crisi.

Il fatto era che diagrammi cartesiani erano pure idonei a rappresentare fenomeni che non è possibile esprimere analiticamente per mezzo della variabile indipendente. Cosicché a questi fenomeni non corrisponderebbero delle funzioni secondo la definizione di Eulero.

Per esempio, l'andamento della temperatura media T registrata nei 12 mesi di in un anno solare, pur rappresentabile per mezzo di un diagramma cartesiano (figura 4), non sarebbe una funzione del mese, almeno in base alla definizione di "funzione" data da Eulero. Il che era perlomeno strano e comunque inaccettabile.

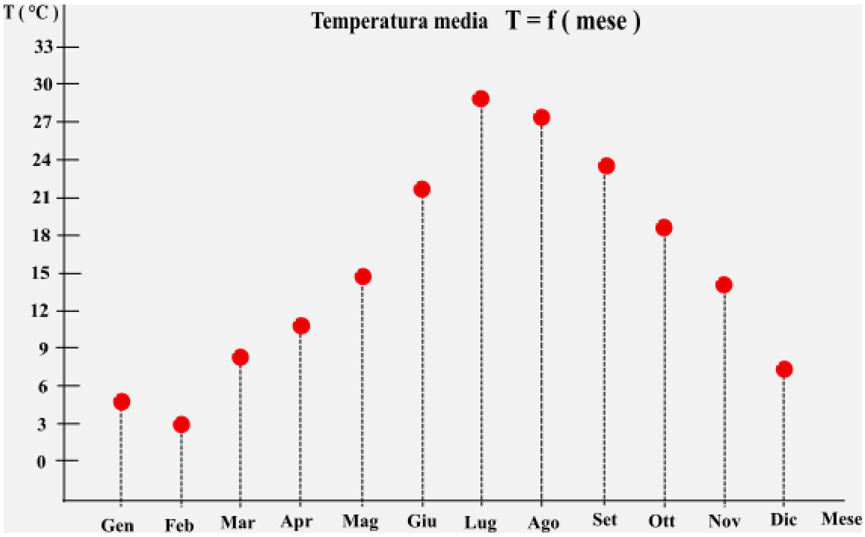

figura 4

Bisognava, dunque, trovare una definizione di funzione più soddisfacente di quella di Eulero.

Questo, dopo tentativi di studiosi diversi, avvenne oltre 100 anni dopo, per merito del matematico tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) [3].

Egli, già nel 1829, faceva intuire una definizione di funzione soddisfacente nella celebre relazione *Sur la convergence des séries trigonométrique qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* (*Sulla convergenza di serie trigonometriche che servono per rappresentare una funzione arbitraria tra alcuni limiti dati*), pubblicata nel gennaio del 1829.

Ma fornì quella definizione di funzione che sarebbe stata accettata definitivamente nel 1837, con la pubblicazione dei suoi studi *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à*

[3] Una gustosa curiosità sul nome di questo grande matematico. La sua famiglia proveniva da una città del Belgio, chiamata Richlet ed egli, ancorché nato in Germania, era considerato "il giovane di Richlet", per l'appunto Lejeune Dirichlet. Condusse in Francia i suoi studi, ma poi succedette a Gauss sulla cattedra di Gottinga.

exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données (*Sulle serie il cui termine generale dipende da due angoli, e che servono ad esprimere funzioni arbitrarie tra limiti dati*):

Una variabile y è **funzione** di x se ad ogni valore di x corrisponde un valore completamente determinato di y. Inoltre non interessa il metodo con il quale sia stata stabilita la corrispondenza indicata.

Questa definizione è posta oggigiorno nei termini seguenti:

Una variabile y si dice **funzione** di una variabile x quando esiste una legge di natura qualsiasi, in base alla quale ad ogni valore di x, scelto in un dato intervallo, corrisponde uno ed un sol valore di y.

In realtà con questa definizione anche la temperatura di un corpo può essere considerata funzione del tempo in cui viene misurata.

Più in generale, con questa definizione, le funzioni sono distinte tra quelle in cui la variabile dipendente y può essere rappresentata come espressione analitica della variabile indipendente x e quelle in cui la legge che esprime y in funzione di x è di tipo sperimentale e non esprimibile analiticamente (*funzioni empiriche*).

Le prime sono quelle che si identificano con la definizione di Eulero.

Dirichlet dimostrò pure che esistono funzioni reali di variabile reale che non possono essere associate ad alcuna curva, funzioni addirittura che non risultano continue in alcun punto del loro dominio, come la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \text{ (cioè se } x \text{ è un numero razionale)} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ (cioè se } x \text{ è un numero irrazionale)} \end{cases}$$

La definizione di Dirichlet è dunque la più ampia possibile.

Bisogna precisare, per completezza d'informazione, che nel 1834 anche il matematico russo Nicolas Ivanovich Lobačevskij (1793-1856) era addivenuto ad una definizione simile a quella di Dirichlet.

Dopo di loro, comunque, per le funzioni che mettono in relazione insiemi numerici (e denominate per questo *funzioni numeriche*) si registrano solo variazioni sul tema, ma nulla di veramente trascendentale, ad opera soprattutto di Cauchy [4] e Weierstrass [5]. Ma, lo ribadisco, solo se si tratta di funzioni numeriche.

In realtà, la definizione di Dirichlet fu poi generalizzata, nel 1939, a quella di funzione fra insiemi di natura qualunque, per merito di Bourbaki ed è la moderna definizione di funzione:

Dati due insiemi X ed Y, si dice **funzione** di X in Y ogni relazione f che a ciascun elemento x∈X associa uno ed un solo elemento y∈Y.

Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo con il quale si "firmava" un gruppo di matematici, per lo più francesi, i quali, a partire dall'anno 1935 e praticamente fino al 1983, assunsero l'impegno di sistematizzare tutta la matematica esistente sulla base di una concezione moderna della matematica stessa, tra cui il concetto di "insieme" e quello di "relazione".

Fra i bourbakisti più celebri si ricordano: Henri Cartan (1904-2008), Jean Dieudonné (1906-1992), André Weil (1906-1998). Ed è proprio a Dieudonné che si deve la suddetta definizione di funzione.

L'influenza dei bourbakisti sulla matematica mondiale fu notevole all'inizio e raggiunse l'apice fra il 1950 e il 1960, ma poi, per varie ragioni sulle quali non mi soffermo, cominciò a scemare ed oggi, di fatto, non se ne parla se non per i passati contributi. Tra i quali la maggior parte dei simboli che oggi usano i matematici.

In seguito a questa nuova definizione, alcune funzioni sono classificate sulla base di determinate caratteristiche e denominate, a seconda dei casi: *suriettive*, *iniettive*, *biiettive*.

Ce ne occupiamo brevemente, dopo aver precisato, una volta per tutte, che consideriamo una funzione f definita da un insieme A (*dominio*) verso un insieme B (*codominio*).

---

4 Augustin Louis Cauchy, matematico francese, 1789-1857.
5 Karl Weierstrass, matematico tedesco, 1815-1897.

- La funzione si dice ***suriettiva*** se ogni elemento del suo codominio è immagine di qualche elemento del dominio (figura 5). In simboli:

$$\forall\, y \in B,\ \ \exists\, x \in A : y = f(x).$$

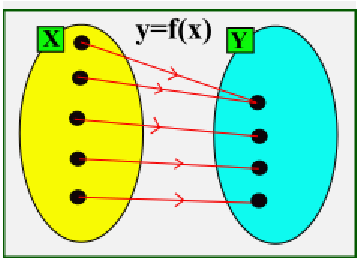

figura 5

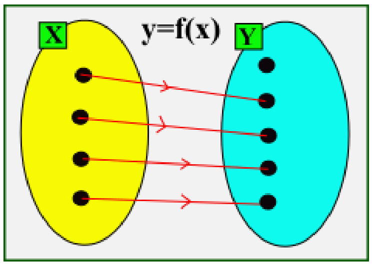

figura 6

- La funzione si dice ***iniettiva*** se ad elementi distinti del dominio, comunque scelti, corrispondono elementi distinti del codominio (figura 6). In simboli:

$$\forall\, a, b \in A : a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)\,.$$

  Oppure, ricorrendo alla proposizione contronominale:

$$\forall\, a, b \in A : f(a) = f(b) \rightarrow a = b\,.$$

- Si capisce che una funzione può essere suriettiva ma non iniettiva (es.: la funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$), e può essere iniettiva ma non suriettiva (es.: la funzione $y=1/x$, definita da $\mathbb{R}_0$ in $\mathbb{R}$).
  Se una funzione è contemporaneamente suriettiva e iniettiva si dice ***biiettiva***.

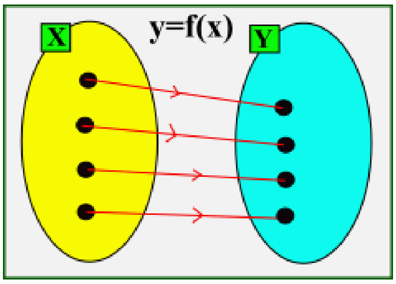

figura 7

- Naturalmente esistono funzioni che non sono suriettive né iniettive, e quindi neppure biiettive: le possiamo denominare ***funzioni generiche*** (figura 1).

Un diagramma di Eulero-Venn (figura 8) ben evidenzia la classificazione suddetta.

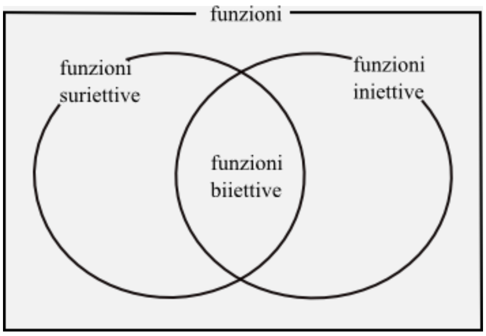

figura 8

3. Bisogna dire che, contestualmente all'opera dei bourbakisti – per i quali dunque una funzione era una particolare relazione fra due insiemi – nasce, nell'ambito della teoria della computazione, una nuova nozione di funzione:

Una **funzione** è una regola di calcolo.

Una funzione f, definita da un insieme X in un insieme Y, può essere allora pensata come un insieme di istruzioni che, impartite ad un certo numero $x \in X$, lo trasformano in un altro numero $y \in Y$ secondo lo schema rappresentato in figura 9.

figura 9

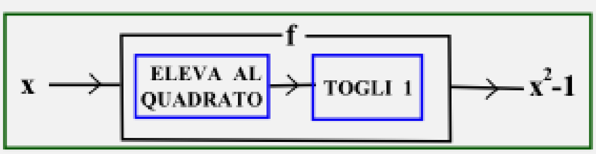

figura 10

In particolare, la funzione $y=x^2-1$ esprime il programma di calcolo evidenziato dallo schema di figura 10.

A questa nuova nozione contribuirono soprattutto due matematici e logici: lo statunitense Alonzo Church (1903-1995) e il britannico Alan Turing (1912-1954).

In seguito a questa nuova definizione di funzione, le funzioni furono classificate in *funzioni calcolabili* e *funzioni non calcolabili*.

Ora, dire cos'è una funzione calcolabile e portarne degli esempi, non è un'impresa difficile. È invece estremamente complicato fornire esempi di funzioni non calcolabili, che non siano esempi banali. E il paradosso è che le funzioni non calcolabili sono in quantità maggiore di quelle calcolabili.

Comunque, provo a dire qualcosa in merito.

- Una funzione si dice ***calcolabile*** se esiste un procedimento di calcolo automatico, vale a dire un algoritmo, capace di ricavarne i valori in corrispondenza dei valori attribuiti alla variabile indipendente.

È calcolabile, per esempio, la seguente funzione:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se n è un numero naturale pari} \\ 1 & \text{se n è un numero naturale dispari} \end{cases}$$

Anche la funzione che genera la successione di Fibonacci, vale a dire la seguente funzione:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n=1 \text{ oppure } n=2 \\ f(n-2)+f(n-1) \text{ se } n>2 \end{cases}$$

è una funzione calcolabile. Si tratta di un esempio di *funzione ricorsiva*, cioè, com'è evidente, di una funzione che richiama se stessa nella determinazione dei vari numeri dopo il secondo.

- Considero banali esempi di funzione non calcolabile la funzione che è chiamata a rispettare il seguente comando: "Elenca tutti i numeri naturali" e le funzioni simili.

Vediamo invece un esempio non banale di funzione non calcolabile.

Al tal fine consideriamo la seguente equazione: $x^n + y^n = z^n$.

Di essa si occupò il francese Pierre de Fermat (1601-1665) e formulò la congettura che, per $n>2$, non esiste alcuna terna di numeri interi positivi che soddisfi l'equazione.

Si sa invece che per $n=1$ e per $n=2$ l'equazione ammette soluzioni intere positive.

La congettura di Fermat, passata alla storia come il *grande teorema di Fermat*, rimase tale per oltre tre secoli, anche se i matematici riuscirono a dimostrare che era vera in molti casi, in particolare per $n=3$ (Eulero) e per $n=5$ (Legendre). Finché nel 1994 il matematico britannico Andrew Wiles (n. 1953) non ne fornì una dimostrazione rigorosa, che per la verità aveva annunciato l'anno prima.

Ciò detto, consideriamo la seguente funzione:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se esiste una terna di numeri interi positivi } (x,y,z) \text{ tali che } x^n+y^n=z^n \\ 1 & \text{se non esiste alcuna terna siffatta} \end{cases}$$

Ebbene, fino alla scoperta di Wiles si poteva dire che $f(1)=f(2)=0$ ed anche $f(3)=f(5)=1$, ma non si poteva dire alcunché per un generico $n>2$. Per questo motivo la funzione $f(n)$ doveva essere considerata *non calcolabile*.

Invece, dopo la scoperta di Wiles, si può affermate che:

$$f(n)=0 \text{ per } n=1 \text{ e per } n=2, \text{ mentre } f(n)=1 \text{ per ogni } n>2.$$

Ragion per cui la funzione, dopo Wiles, è da considerarsi *calcolabile*.

4. Abbiamo visto dunque come nasce e si sviluppa il concetto di funzione. Rimane da descrivere quali sono i metodi di assegnazione delle funzioni, vale a dire come una grandezza dipenda da un'altra. Di metodi ce ne sono in verità diversi e per lo più sono conosciuti dagli studenti liceali. Ad ogni buon conto, vogliamo soffermarci su di essi per qualche considerazione.

- Il metodo che risulta forse il più utilizzato è il *metodo analitico*: consiste nell'assegnare la funzione con una formula, eventualmente anche una formula ricorsiva. O anche con più formule, ciascuna relativa ad un determinato intervallo di variazione della variabile indipendente.

Con questo metodo sono assegnate di fatto le operazioni cui deve sottoporsi la variabile indipendente per ottenere il valore della funzione.

- Un altro metodo è la *tabulazione* (o *assegnazione tabulare*).

È tipica delle funzioni empiriche, ma non solo.

Precisamente, quando si ha a che fare con una funzione empirica $y=f(x)$, si calcolano i valori di y, corrispondenti a determinati valori di x, attraverso un rilevamento sperimentale; in pratica, osservando direttamente, per mezzo di un qualche strumento di misura, il valore di y corrispondente ad un dato valore di x. Si costruiscono quindi delle *tabelle di rilevamento*

Per esempio, la variabile dipendente sia la distanza s dal casello autostradale di Roma Nord, di un automobilista che si muove verso Firenze, calcolata rispetto al tempo t che passa dalla partenza dell'automobilista stesso dal suddetto casello. Ebbene, se la distanza s è misurata in chilometri (km) di autostrada ed il tempo t in ore (h), supponiamo che si abbia la seguente tabella di rilevamento (tabella 1):

t (in h)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
s (in km)	0	20	44	44	60	85	105	127	140	165	190

tabella 1

Con questo metodo è evidente che alcuni valori della funzione sono già noti e pronti per l'uso.

Ma dicevano che non solo per le funzioni empiriche si ricorre ad una rappresentazione tabulare.

Per esempio, sono in fondo rappresentazioni tabulari le note tavole dei logaritmi e le tavole delle funzioni trigonometriche, così come le tavole finanziarie e le tavole che convertono i gradi sessagesimali in gradi centesimali e viceversa, o i gradi sessagesimali in radianti e viceversa, come anche le tavole che forniscono le radici quadrate o cubiche dei numeri naturali, eccetera.

- Sia delle funzioni assegnate con metodo analitico sia di quelle assegnate con una tabulazione è possibile una rappresentazione grafica. Per l'appunto, è il *metodo grafico* un altro metodo di assegnazione delle funzioni.

Riguardo alle funzioni empiriche ne abbiamo già visto un esempio con la figura 4.

Ma vogliamo soffermarci anche sulla rappresentazione grafica della funzione s=s(t) considerata sopra.

La rappresentazione, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), consiste nella successione di punti di coordinate $\big(t, s(t)\big)$ come segnalate dalla tabulazione (figura 11).

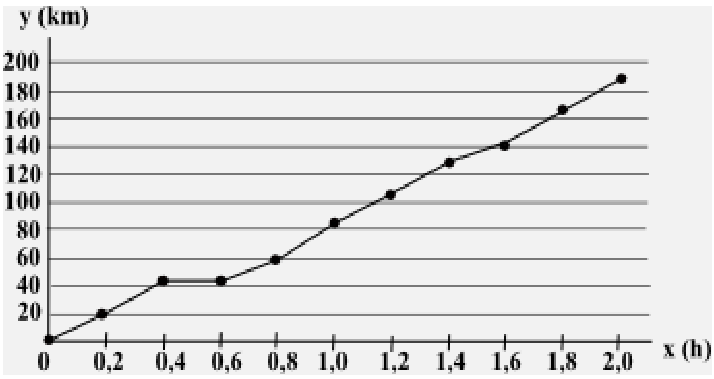

figura 11

I punti della rappresentazione grafica, ipotizzando che tra un rilevamento e l'altro il moto si svolga con "regolarità", possono essere uniti con dei segmenti di retta, ottenendo così una spezzata. Ma è chiaro che questa ipotesi è del tutto arbitraria, dal momento che non è noto cosa sia realmente accaduto fra due rilevamenti successivi.

Ci sono, poi, altri modi di rappresentare graficamente le funzioni empiriche – come *istogrammi*, *areogrammi*, *ideogrammi*, *cartogrammi* o altro – ma non riteniamo opportuno occuparcene, trattandosi di cose note a tutti gli studenti fin dai primi anni di scuola secondaria.

- Un altro metodo di assegnazione delle funzioni, nato come già spiegato con l'avvento della computazione, consiste nel definire un *programma di calcolo* (figure 9-10).

BIBLIOGRAFIA.

[1] Luis Fernando Areán, *Lagrange*, Collana Geni della Matematica, Milano, RBA Italia, 2017.
[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, edizione 1980.
[3] Livia Giacardi – Silvia Clara Roero, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Torino, Stampatori, 1979.
[4] Anatolij Dmitrievič Myškis, *Lezioni di matematica generale*, Mosca, Mir, 1979.
[5] Gheorghij Evghenievič Šilov, *Analisi Matematica – Funzioni di una variabile*, Mosca, Mir, 1978.
[6] José Carlos Varela Peña, *Dirichlet*, Collana Geni della Matematica, Milano, RBA Italia, 2018.