Giuseppe Zappalá

Relazione per il Convegno Mathesis, Catania 31/1/2023
ISTITUTO G. B. VACCARINI

Carissimi amici e colleghi, ringrazio il comitato organizzatore del convegno per l'onore di avermi invitato come relatore, purtroppo per motivi familiari quasi certamente non potro' essere presente; con questa prospettiva ho pregato l'amico e collega Prof. Mario Strano di leggere questa relazione con la premessa che "Ludendo discitur" non deve essere inteso nel senso che la matematica deve raccontare barzellette ma nel senso che studiarla non deve procurare sofferenza.

Sono trascorsi poco piu' tre anni dall'ultima riunione avvenuta proprio in questa sede, durante la quale abbiamo convenuto che occorre pensare seriamente a come possiamo rendere gradevole l'insegnamento della matematica, quella disciplina che le statistiche spietate indicano essere "la materia piu' odiata dagli studenti italiani", da qui il titolo "ludendo discitur" che dobbiamo accettare come auspicio assieme agli insegnanti di latino, un'altra materia che certamente non gode di un eccezionale gradimento.

Avere accostato la matematica alla lingua di Cesare mi fa venire in mente che un secolo fa veniva promulgata la riforma Gentile, quella che avendo posto il latino al di sopra di tutti gli insegnamenti scolastici(tre prove alla maturita' scientifica, due versioni: latino-italiano e italiano-latino non erano sufficienti e quindi si affrontava la prova orale il tutto in tre giorni distinti) trasformo' una bellissima lingua in uno strumento di persecuzione e di tortura. Quella riforma che viene ancora citata come modello, con un solo colpo ha bocciato la scelta di Dante Alighieri e Galileo Galilei, ha posto nel sottoscala la scienza di Talete e impedito ai suoi seguaci di usare la porta principale. Sarebbe un evento storico se dopo cento anni si restituisse la dignita' sottratta costituendo un LICEEO MATEMATICO degno di questo nome, nove ore settimanali dedicate alla scienza suddetta, quattro alla fisica, due alle scienze naturali, due alle motorie e quelle che restano agli altri insegnamenti. Gli argomenti non mancano, oltre alla matematica generale(con annessa la geometria euclidea), esiste quella finanziaria, la attuariale, il calcolo delle probabilita', la trigonometria sferica, la statistica....il tutto affidato a studenti e docenti superselezionati.

La matematica, la scienza del come e del perche', richiede attenzione e fantasia, l'attenzione si sviluppa con gli esercizi la fantasia risolvendo problemi e senza fantasia avanti non si va. Purtroppo in questo campo non si segnalano progressi, oggi come ai miei tempi, nel corso del primo e del secondo anno delle superiori ai problemi si dedicano le ultima settimane dell'anno scolastico, in pieno accordo con i libri di testo che vi dedicano poche pagine poste in fondo al volume.

Chi era presente il 23 gennaio del 2020, ricordera' che ho sollevato la questione mostrando un semplice esempio nel quale si parlava di galline e conigli, risolubile anche sconoscendo il quadrato del binomio, oggi ribadisco quei concetti, mostrando con piu' particolari come sia possibile iniziare a risolvere problemi subito dopo avere esposto i primi rudimenti del calcolo letterale e prima ancora le proprieta' costitutive della sottrazione e della divisione, fermo restando che le proprieta' delle equazioni vanno puntualmente trattate.

Sottrazione - Dati tre numeri m, p, q si dice che q e' la differenza di m meno p e si scrive $m - p = q$ se e solo se $m = p + q$.
Nota- Se m, p, q sono i tre numeri di prima, dall'ultima relazione segue che la differenza $m - q = p$ visto che ancora $m = p + q$, quindi i numeri p(minuendo) e q(resto) sono intercambiabili, passando da una parte all'altra del segno $=$ i sottraendi cambiano ruolo e diventano addendi mentre questi ultimi, cambiando posizione, assumono il ruolo di sottraendi.

Divisione-Dati tre numeri u, v, z si dice che z e' il quoziente della divisione $u : v$ e si scrive $u : v = z$ se e solo se $u = vz$.
Nota - Analogamente al caso precedente anche $u : z = v$ implica $u = vz$, in questo caso il passaggio da una parte all'altra del segno $=$ trasforma i fattori in divisori e viceversa.
Con queste conoscenze si riescono a risolvere i seguenti problemi:

P1) Il prete di una chiesuccia di campagna apre la cassetta delle offerte per distribuirne il contenuto ai poveri che vi si erano radunati, facendo i conti si accorge che per dare 4 euro a ciascuno ne mancano 35, dandone 3 ne avanzano 20; quanti erano i poveri e quante le monete tutte di un euro ciascuna?
Soluzione- Indicando con x il numero delle persone e con y quello delle monete si scrivono le seguenti espressioni:

$$4x = y + 35; \quad 3x = y - 20 \qquad (1)$$

nelle quali figurano dei termini sconosciuti x, y e nell' interno il segno $=$. Le espressioni con queste caratteristiche vengono chiamate equazioni, complessivamente prendono il nome di sistema. Iniziando dalla $3x = y - 20$ e applicando la proprieta' di simmetria si ottiene $y - 20 = 3x$ da cui, per la proprieta' della sottrazione, deriva $y = 3x + 20$, sostituendo nella prima si ha $4x = 3x + 20 + 35$ dalla quale discende $4x - 3x = 20 + 35 = 55$ e infine si deduce:

$$x = 55,\ y = 3 \cdot 55 + 20 = 165 + 20 = 185 \quad (2)$$

sostituendo nelle equazioni originarie si ottengono le due identita'

$$4 \cdot 55 = 185 + 35, \quad 3 \cdot 55 = 185 - 20 \quad (3)$$

che rappresentano la verifica, in definitiva i poveri erano 55 le monete 185.

P2) Volendo generalizzare, sostituendo al posto di 35 il numero m e p al posto di 20 si ottiene

$$x = m + p, \quad y = 3m + p. \qquad (4)$$

Dato che una qualsiasi equazione di primo grado ad una sola incognita si riduce sotto la forma $ax + b = cx + d$, quando si lasciano i termini sempre dalla stessa parte, dopo di che applicando le proprieta' del trasporto, si ottiene $Ax = B$ a questo punto si dimostra il
Teorema - Se $A \neq 0$ allora $x = B/A$ e' la soluzione cercata, infatti si ha

$$A \cdot \frac{B}{A} = \frac{A}{1} \cdot \frac{B}{A} = \frac{AB}{1A} = B$$

verificato. Se esistesse un'altra soluzione $x = C$ dovrebbe accadere che

$$AC = B = A \cdot \frac{B}{A} \to AC = A \cdot \frac{B}{A}$$

mettendo in evidenza $A \neq 0$ si ha

$$A[C - \frac{B}{A}] = 0 \to C - \frac{B}{A} = 0 \to C = \frac{B}{A}$$

come dire le due soluzioni debbono coincidere.
Il precedente ha tutte le caratteristiche di un teorema di esistenza e unicita'.

Cosa ne dice il testo che avete in adozione? quanti teoremi sono dimostrati? Come definisce l'uguaglianza fra due frazioni?.....
Alla Media i ragazzini accettano le "regole" al superiore queste vanno provate, alle elementari si apprendono gli algoritmi delle quattro operazioni rappresentate con i segni +,-,:,x alle superiori va dimostrato che usando quelle tecniche i risultati ottenuti soddisfano le definizioni.
Avete mai visto un testo scolastico che affronta la questione? Sono tutti concentrati sugli esercizi, i ragazzi sono intelligenti e certe domande se le pongono, magari in modo meno chiaro ma a queste si deve rispondere.

P3) Un problema mai visto da nessuna parte - Scrivere un sistema di 3 equazioni a 3 incognite avente i 9 coefficienti delle incognite tutti non nulli e come soluzione la terna ordinata 2,3,1. Si inizia scrivendo la terna di numeri nell'ordine arbitrariamente assegnato

$$2, \qquad 3, \qquad 1 \qquad (1)$$

si moltiplicano i tre numeri precedenti per tre numeri assegnati ad arbitrio e si calcoli il valore della corrispondente espressione

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 6 \qquad (2)$$

si ripete altre due volte la procedura e si ottengono altre due espressioni

$$-5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = -13, \qquad (3)$$

$$9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = -5 \qquad (4)$$

a questo punto si sostituscono in ogni prodotto, al posto del secondo fattore, le variabili x, y, z e si ottiene il sistema seguente

$$4x - 3y + 7z = 6 \qquad (5)$$

$$-5x + y - 6z = -13 \qquad (6)$$

$$9x - 3y - 8z = -5. \qquad (4)$$

Alcuni consigli ai giovani colleghi. 1) Preparate la scelta dei compiti in modo che i Vostri allievi risolvano almeno un problema alla settimana, se i libri di testo non vi aiutano inventateli, una volta che si sono resi conto di quanto siano utili le equazioni, accetteranno meno malvolentieri anche quelle a quattro piani. 2) Ricordatevi che non tutti i problemi si traducono in complicate espressioni matematiche ne cito uno come esempio: i calendari sono unici oppure dopo un certo numero di anni si ripetono? 3) Sapete che esistono delle pregevoli pubblicazioni dedicate alla "matematica divertente e curiosa"? fatene conoscere qualcuna ai Vostri studenti. 4) Mi dicono che la bellissima geometria euclidea non viene curata come una volta, secondo me si commette un grosso errore. 5) Se qualcuno ha in mente di scrivere un libro per il superiore ci provi dimostrando tutto il possibile, in caso contrario occorre inventare delle giustificazioni convincenti, in matematica non ci sono scelte arbitrarie. 6) Durante le interrogazioni chiedete spesso quali proprieta' vengono applicate, non e' tempo perso. 7) Tre anni fa abbiamo visitato un pollaio che ospitava galline e conigli e contato i piedi e le teste, oggi visitiamo un capannone ove sostano moto, api(tricicli), automobili; il numero totale dei mezzi di trasporto e' 25, il numero delle ruote e' 76, i tricicli sono il doppio delle moto. Quanti sono le moto, i tricicli e le automobili? Chiedetelo ai Vostri alunni. 8) RICORDATEVI e RICORDATE che le persone allenate a risolvere i problemi teorici sono quelle che risolveranno, meglio di altri, quelli pratici.

P4) "Ludendo discitur", anche durante una gita si puo' apprendere e insegnare quindi: " Ludendo discitur atque docitur."
Un gruppo di giovani durante una gita in campagna scopre un pozzo abbandonato, i soliti curiosi si affacciano dal parapetto per vedere la propria effige nel fondo e non ci riescono, si discute sulla profondita' del manufatto e qualcuno propone di misurarla allacciando le cinghie dei calzoni, provano, ma le cinture non sono sufficienti neppure aggiungendo un pezzo di corda trovata sul posto. A questo punto Luciano, appassionato di matematica e fisica, ha un'idea originale: ottenere la misura della distanza fra il bordo superiore del parapetto e la superficie libera dall'acqua contenuta, utilizzando il suo cronometro di marca vinto come premio in una gara matematica, tira fuori dallo zainetto un'agenda e un pennarello e comunica agli amici la sua decisione, alcuni compagni scoppiano dalle risate. Interviene Annalisa, sempre pronta alle battaglie verbali e in competizione con Luciano sin dalla scuola materna, la quale rimprovera gli scalmanati e spiega che la misura richiesta si calcola con buona approssimazione lasciando cadere un sasso e misurando il tempo dall'inizio del moto all' istante in cui si percepisce il rumore dell'impatto con l'acqua o col fondo(Annalisa e Luciano sono i nomi dei miei figli).

Misurare la profondita' di un pozzo ovvero di una distanza, costituisce un'operazione che si effettua di solito mediante una fune o un nastro graduato, a volerla misurare col cronometro si rischia di essere considerati folli. Ebbene usando le conoscenze di matematica e fisica che si apprendono in cinematica e in acustica ci si riesce, basta lasciar cadere un sasso in modo da non toccare le parete del foro praticato nel terreno, quando quello dopo un tempo t' raggiunge il pelo libero del liquido(o il fondo), parte un'onda sonora che raggiunge il parapetto nel tempo t''; mediante il cronometro si misura il tempo totale $t' + t'' = T$, a questo punto viene in aiuto la fisica la quale afferma che fra la profondita' h del pozzo e la durata t' intercorre il legame $h = (1/2)gt'^2$ mentre h e t'' sono legate dalla formula $h = Vt''$, avendo indicato con g l'accelerazione di gravita' e con V la velocita' del suono nell'aria che saranno ritenute costanti durante l'esperimento. Per quanto detto si scrivono le tre equazioni coinvolgenti le grandezze fisiche interessate e le rispettive misure,

$$h = \frac{1}{2} g t'^2, \quad h = V t'', \quad t' + t'' = T \qquad (1)$$

e poi dalla prima, scartando la radice negativa, dalla seconda e dalla terza di (1) si ottengono rispettivamente

$$t' = radice\,quadrata\,di \left(\frac{2h}{g}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t'' = \frac{h}{V}, \quad \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{h}{V} = T \quad (2)$$

a quest'ultima equazione(irrazionale) conviene dare le forme seguenti

$$\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = T - \frac{h}{V}, \quad (2h/g)^{\frac{1}{2}} = T - h/V \quad (3)$$

e ricordare come vanno trattate. Anzitutto occorre che $T - h/V > 0$ come il primo membro ossia che $h < VT$ per motivi algebrici, in pieno accordo con le esigenze della fisica, la profondita' del pozzo deve essere inferiore alla distanza VT percorsa dal suono nel tempo totale misurato dall'orologio, comprendente quello di caduta del sasso e quello di risalita del suono, in questo modo e' possibile seguire la teoria e razionalizzare l'equazione contenente il radicale, ad operazione effettuata si ottiene nell'ordine di scrittura:

$$\frac{2h}{g} = T^2 - 2\frac{T}{V}h + \frac{h^2}{V^2}, \quad 2V^2 h = gV^2T^2 - 2gVTh + gh^2 \quad (4)$$

dopo aver moltiplicato per gV^2 ambo i membri della prima, dopo qualche altro passaggio si perviene alla

$$gh^2 - 2(gVT + V^2)h + gV^2T^2 = 0. \qquad (5)$$

Questa svolge il ruolo di equazione risolvente, dato che il discriminante

$$\Delta/4 = (gVT + V^2)^2 - g^2V^2T^2 = g^2V^2T^2 + 2gTV^3 + V^4 - g^2T^2V^2 =$$

$$= 2gTV^3 + V^4 = V^3(2gT + V) > 0 \qquad (6)$$

essa possiede due radici reali e positive visto che presenta due variazioni(Cartesio) (+,-,+), risolvendola si ottiene (7)

$$h_1 = \frac{(gT + V)V + [V^3(2gT + V)]^{\frac{1}{2}}}{g}, \; h_2 = \frac{(gT + V)V - [V^3(2gT + V)]^{\frac{1}{2}}}{g}$$

a questo punto bisogna scegliere quale delle due radici dell'equazione ha i requisiti per essere eletta soluzione del problema.

La radice h_1 va scartata dato che contraddice la condizione $h < VT$(indispensabile sia per razionalizzare la seconda delle (3) e sia per obbedire al buon senso fisico) come mostrano le relazioni sottostanti

$$h_1 = \frac{(gT+V)V}{g} + \frac{[V^3(2gT+V)]^{\frac{1}{2}}}{g} > \frac{gTV+V^2}{g} > \frac{gTV}{g} = TV. \quad (8)$$

Per accettare la soluzione h_2 della (5) come soluzione definitiva del problema, occorre provare che risulta verificata la condizione $h_2 < VT$ come si verifica nel rigo successivo (11)

$$h_2 = \frac{(gT+V)V - [\Delta/4]^{\frac{1}{2}}}{g} = \frac{gTV}{g} + \frac{V^2 - [\Delta/4]^{\frac{1}{2}}}{g} < \frac{gTV}{g} = VT$$

dato che $V^2 - [\Delta/4]^{\frac{1}{2}} = V^2 - [2gTV^3 + V^4]^{\frac{1}{2}} < 0$ la h_2 viene dichiarata soluzione del problema. Questo finale potrebbe venire assimilato da qualcuno a quello di un film dell'orrore, una soluzione che non e' soluzione! Piano per favore, elevando al quadrato la $x = 2$ da una parte e dall'altra, si ottiene $x^2 = 4$ le cui soluzioni sono i numeri 2 e -2 mentre la prima equazione accetta soltanto il numero 2, orbene l'equazione (2) viene razionalizzata elevando al quadrato, normalissimo che l'ultima operazione introduca una soluzione estranea.
Assumendo $g = 10m/sec^2$, $V = 300m/sec$, $T = 10sec.$ si ottiene una profondita' di circa $390m$.

Per chiudere auguro a tutti un felice 2023 assieme alle Vostre famiglie e chiedo scusa per la mia assenza, spero e mi auguro di essere presente la prossima volta. Tornando ai problemi della SCUOLA auspico che "in alto loco" si rendano conto che perdere tempo per accertarsi se lo studente conosce il nome del padre di Beatrice o il significato(potrebbe essere una burla) del " pape' satan pape' satan aleppe" non ha senso, occorre una scuola che insegni a fare buon uso dei mezzi disponibili e soprattutto una scuola che consideri il cervello un organo da potenziare e non un sacco da riempire. In questa ottica potrebbe essere determinante l'istituzione del Liceo Matematico come lo intendo io, utilissimo per accorciare il tempo di maturazione delle menti predisposte dalla natura verso le Scienze Esatte, quelle che hanno determinato il progresso di cui godiamo. A pensarci bene sarebbe ottima la decisione di istituire tre licei: il classico che conservi i valori della tradizione, un liceo generalista per i ragazzi che ancora non manifestano una spiccata attitudine, il liceo matematico per chi sin da bambino per i numeri stravede. Giuseppe Zappala'

Appendice (postuma) - Anni fa, alla fine di una "chiaccherata" sulla matematica, durante la quale svolgevo il compito di moderatore, un distinto signore(ex compagno di liceo scientifico, laureato in chimica e farmacia) intervenne dicendo sarcasticamente "Voi matematici avete gli scheletri pieni di armadi" dite che un segmento contiene infiniti punti la qualcosa mi lascia molto perplesso, perche' se il punto ha misura non nulla allora tutti i segmenti hanno lunghezza infinita, se poi avesse misura nulla tutti i segmenti dovrebbero avere gli estremi coincidenti, dato che la somma di quanti si vogliano misure nulle risulta nulla. La mia risposta fu: "queste affermazioni o meglio insinuazioni si possono smentire in pochi minuti, pero' a me piace convincere le persone pertanto ho scelto l'argomento della prossima riunione, discuteremo dell'infinito matematico, di paradossi e di antinomie". E durante la successiva riunione furono esaminati gli argomenti promessi.Nel corso di questi anni ho potuto constatare che persone ritenute coltissime, sconoscono quali sono i difetti logici dei ragionamenti inventati da quel gran simpaticone di Zenone(fa anche rima). Per smentire certe dicerie occorre partire da quel teorema che afferma: diagonale e lato di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili. Questo vuol dire che non esiste nessun segmento, per quanto piccolo, che sia contenuto un numero intero(positivo) di volte nell'una e un numero intero(positivo e diverso) nell'altro. Averlo scoperto costituisce un grandissimo merito della scuola di Crotone anche se, come aveva previsto Pitagora, fu la maggiore causa della crisi del pitagorismo. Di questo teorema importantissimo ne esistono due versioni, una puramente geometrica e una fondata sulla teoria dei numeri, seguendo questa seconda strategia sono preliminari due teoremi non sempre dimostrati nei testi in circolazione.

Teorema 1 - Il quadrato di un numero pari e' pari, il quadrato di un dispari e' pure dispari.

Teorema 2 - Qualunque numero naturale ammette una ed una sola decomposizione in fattori primi.

Essendo certi che lato e diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili, si passa alle progressioni geometriche, poi alle serie geometriche per apprendere che sommando un numero infinito di numeri particolari si ottiene un numero(finito), questo basta per disinnescare il paradosso dello stadio, andando avanti con lo studio si arriva a Galileo che azzera la fisica aristotelica, poi a Newton che, appollaiato sulle spalle del primo, inventa la MECCANICA RAZIONALE assieme alle equazioni differenziali, a questo punto cade il paradosso della freccia, qualche secolo ancora e con la scoperta degli insiemi non numerabili di Cantor si sbriciola l'antinomia portata con irriverenza ad esempio dal mio amico chimico.

Post scriptum- Chiudo esprimendo il desiderio che gli atti di questo Convegno vengano spediti al Ministero competente.