Le serie infinite: primi approcci – Parte prima

di Antonino Giambò

1. Oggigiorno sappiamo esattamente quando si può parlare di somma di una serie e cosa s'intende per somma di una serie, conosciamo criteri rigorosi per stabilire quando una serie converge, quando diverge, quand'è indeterminata. In molti casi, anche se non in tutti, siamo in grado di calcolare la somma esatta di una serie convergente.

Ma non è sempre stato così, ovviamente. Potremmo dire che forse all'inizio si procedeva a tentoni e comunque la geometria vi svolgeva un ruolo importante se non addirittura determinante.

Ebbene, mi propongo, in questo articolo, di portare a conoscenza degli studenti liceali come hanno proceduto i pionieri in questo campo e, in particolare, quali sono stati i contributi di colui che per primo avviò una ricerca approfondita su questo tema, vale a dire lo svizzero Jakob Bernoulli (1655-1705).

Lo fece con la pubblicazione, tra il 1684 e il 1704, di 5 articoli, recanti il titolo *Positiones aithmeticae (*oppure *Positionum) de seriebus infinitis* (*Dissertazioni aritmetiche (*oppure *dissertazione) sulle serie infinite*).

Per la cronaca, gli articoli secondo, terzo e quarto furono affidati da Bernoulli ad alcuni suoi allievi dell'Università di Basilea, come base per la loro tesi di laurea magistrale. Precisamente:

- la seconda dissertazione, pubblicata nel 1689, fu affidata a Johann Jacob Fritz (1671-1716); fu affidata pure, ma nel 1692, a un altro allievo, Hieronymus Beck (1674-1708);
- la terza dissertazione, pubblicata nel 1696, fu affidata a Jakob Hermann (1678-1733);
- la quarta, pubblicata nel 1704, fu affidata a Nicolaus Harscher (1683-1742).

La quinta ed ultima dissertazione sulle serie, pubblicata anch'essa nel 1704, fu affidata invece al nipote Nicolaus Bernoulli (1687-1759), anch'egli allievo dello zio.

Comunque, prima di questi lavori di Bernoulli, altri studiosi si erano occupati sporadicamente della materia.

2. Gli antichi studiosi greci ritenevano che la somma di infiniti numeri (positivi) non potesse avere che un valore infinito ed esattamente con questo convincimento Zenone di Elea, filosofo della Magna Grecia, formulò nel V sec. a.C. i suoi celebri paradossi.

In realtà, non era così, dal momento che ci sono situazioni in cui la somma di infiniti numeri positivi ha un valore finito. Questo, però, gli antichi Greci lo ignoravano. Anche se non mancò chi (Aristotele, Archimede) sospettò che la somma di infiniti termini potesse avere un valore finito.

La scoperta e il convincimento che in effetti è così avvenne comunque molti secoli dopo.

Il primo esempio del genere fu opera di un matematico e logico inglese, Richard Suiseth (noto anche come Richard Swineshead), attivo intorno alla metà del secolo XIV, e denominato *Calculator* per la sua abilità nei calcoli. Questi, con un lungo enunciato e una più lunga dissertazione verbale, si occupò della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

dimostrando che ha un valore finito ed esattamente il valore 2.

Non proporrò la dimostrazione di Calculator, ma una dimostrazione che si ispira a quelle proposte da Bernoulli. Lo farò però nella seconda parte di questo contributo, allorché proporrò anche delle interessanti generalizzazioni.

A parte questa serie di Calculator, mi occuperò in questa prima parte delle seguenti altre serie:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{4^n} + \cdots,$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

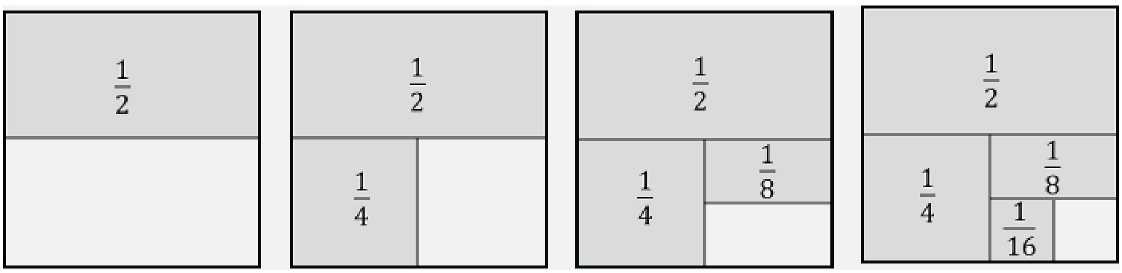
3. Incominciamo con la serie (2).

Al riguardo, consideriamo un quadrato di area 1 e suddividiamolo in due parti uguali e dunque ciascuna di area $1/2$: coloriamo una di queste due parti (figura 1a). Suddividiamo quindi l'area non colorata ancora in due parti uguali e perciò ciascuna di area $1/4$: coloriamo una di queste due parti (figura 1b). Di nuovo, suddividiamo la parte non colorata in due parti uguali e dunque ciascuna di area $1/8$ e coloriamo una delle due parti (figura 1c). E così via, all'infinito.

Ad operazione conclusa (ovviamente soltanto immaginata) il quadrato è riempito completamente dalle parti colorate e pertanto la somma delle aree di queste infinite parti è uguale all'area del quadrato, cioè uguale ad 1.

Dunque:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1\,.$$



(a) (b) (c) (d)

figura 1

Ai giorni nostri, per dimostrare che la serie converge e, di più, che converge al valore S=1, basta tener presente che si tratta di calcolare la somma S_n di n termini di una progressione geometrica di primo termine $1/2$ e ragione $1/2$ e di calcolare successivamente il limite di questa somma quando $n\to\infty$. Per cui si ha:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1\,.$$

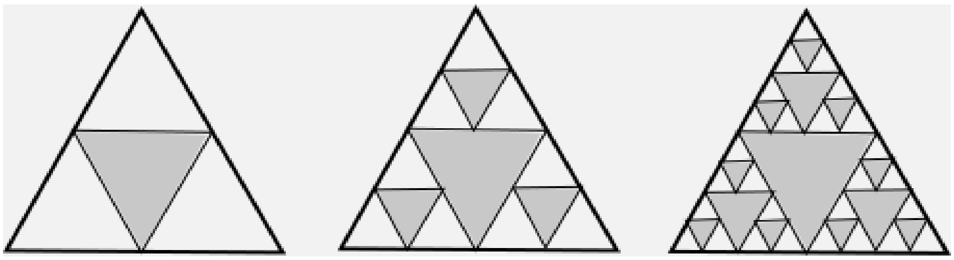
4. Il procedimento geometrico seguito per la serie (2) si può ripetere, *mutatis mutandis*, per la serie (3).

Al riguardo, consideriamo un triangolo equilatero di area 1 e suddividiamolo in 4 parti uguali, ciascuna ovviamente di area $1/4$, costruendo il triangolo avente per vertici i punti medi dei suoi lati e coloriamo questo triangolo (figura 2a). Ripetiamo l'operazione sui tre triangoli rimasti scoperti, ottenendo tre triangoli, ciascuno di area $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{4}$ cioè $\left(\frac{1}{4}\right)^2$: cosicché la parte colorata del triangolo adesso ha area $\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2$ (figura 2b). Ripetiamo ancora l'operazione sui nove triangolini rimasti scoperti fino ad ottenere una colorazione del triangolo avente area $\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (figura 2c). E così via all'infinito.

Ad operazione conclusa (ovviamente soltanto immaginata) il triangolo è riempito totalmente dalle parti colorate, per cui la somma delle aree di queste infinite parti è uguale all'area del triangolo, cioè uguale ad 1.

Dunque:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{4^n} + \cdots = 1\,.$$



(a) (b) (c)

figura 2

Come sopra, per dimostrare che la serie converge e, di più, che converge al valore $S=1$, basta tener presente che si tratta di calcolare la somma S_n di n termini di una progressione geometrica di primo termine $1/4$ e ragione $3/4$ e di calcolare successivamente il limite di questa somma quando $n \to \infty$. Per cui si ha:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1\,.$$

5. I due precedenti procedimenti sono stati proposti per dare un'idea del modo di ragionare di Bernoulli. Descrivo adesso il suo primo lavoro sulle serie, pubblicato nel 1684.

Riguarda la serie (2), conosciuta come *serie armonica*.

Bisogna precisare che per primo si occupò di questa serie il francese Nicole Oresme (1323-1382), vescovo di Lisieux, matematico, fisico, astronomo, filosofo, teologo, dimostrandone anche la non convergenza, primo esempio nella storia di una simile dimostrazione. Riporto al riguardo un brano tratto da [2, pag. 312]:

« Egli raggruppava i termini successivi della serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

ponendo il primo termine nel primo gruppo, i due termini successivi nel secondo gruppo, i quattro termini successivi nel terzo gruppo, e così via: l'm-esimo gruppo veniva a contenere 2^{m-1} termini. Appare allora evidente che abbiamo un numero infinito di gruppi e che la somma dei termini contenuti in ciascun gruppo è almeno $1/2$. Pertanto, sommando tra loro un numero sufficiente di termini disposti in ordine, possiamo superare qualsiasi numero dato. »

E questo basta per concludere che la serie è divergente.

Anche il sacerdote e matematico bolognese Pietro Mengoli (1626-1686) dimostrò la non convergenza della serie armonica (1650).

Non è escluso che egli conoscesse la dimostrazione di Oresme, così come non è escluso che la conoscesse Bernoulli. Ebbene, è proprio sulla dimostrazione di Bernoulli che fermeremo la nostra attenzione

- Sia allora un quadrato di area 1 (figura 3). Gli poniamo accanto, uno dopo l'altro, gli infiniti rettangoli aventi basi uguali al lato del quadrato, cioè 1, e altezze via via uguali a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, ossia i rettangoli di area rispettivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

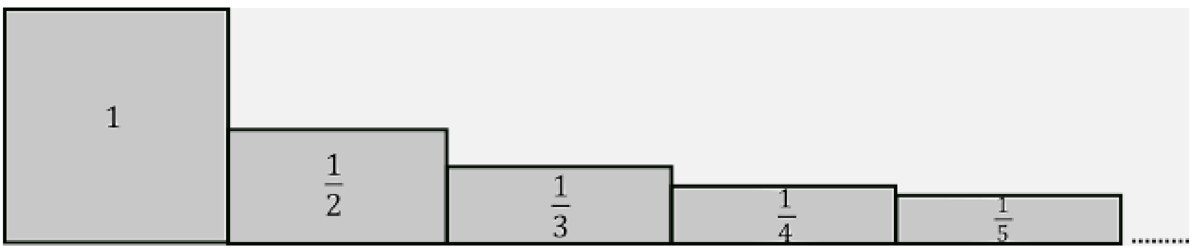


figura 3

Dopo di che, lasciando al loro posto il quadrato e il primo rettangolo, riportiamo sul rettangolo di area $\frac{1}{3}$ quello di area $\frac{1}{4}$; sul rettangolo di area $\frac{1}{5}$ i tre rettangoli di aree $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$; sul rettangolo di area $\frac{1}{9}$ i 7 rettangoli di aree $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}$; e così via (figura 4).

In questo modo, la somma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

diventa uguale alla somma delle aree di tutti gli infiniti quadrilateri così ottenuti.

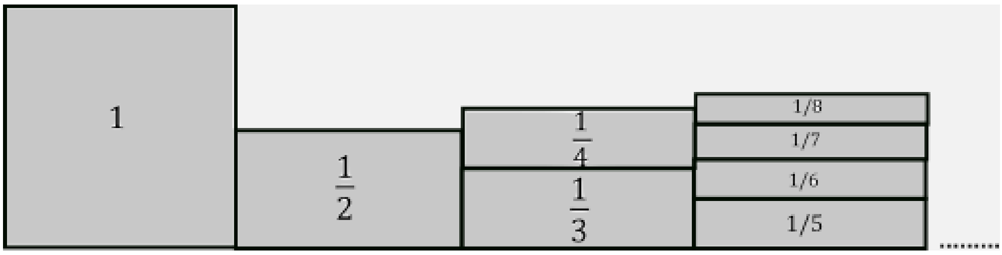


figura 4

Ora, si costata che le aree del quadrato e del rettangolo adiacente ad esso e quelle dei quadrilateri ottenuti con la sovrapposizione descritta sono le seguenti:

$$1\,,\quad \frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\,,\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\,,\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\,,\ldots$$

e, di queste aree, una soltanto è uguale a $1/2$, mentre le altre sono maggiori di $1/2$, come mostra la figura stessa o, per conferma, come può mostrare il calcolo.

Di fatto, lasciate da parte le aree dei primi due quadrati, che chiaramente sono la prima maggiore di $1/2$ e la seconda uguale ad $1/2$, risulta:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{7}{12}>\frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\approx 0{,}20+0{,}16+0{,}14+0{,}12=0{,}62>\frac{1}{2}\,,\ \text{ eccetera.}$$

Si desume che la somma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

è maggiore della somma

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots}_{\text{infiniti termini}}.$$

D'altro canto, la somma di infiniti numeri positivi uguali, quali che essi siano, è uguale ad infinito. Ragion per cui anche la serie armonica ha somma infinita.

- Ma abbiamo la certezza che gli infiniti raggruppamenti di rettangoli sovrapposti hanno tutti un'area maggiore di $1/2$?

Bernoulli si pose questo interrogativo e, per eliminare ogni dubbio, nella stessa dissertazione propose una dimostrazione di tipo aritmetico. La ripropongo, esposta ovviamente nel nostro linguaggio.

Riprendiamo dunque la serie (1) e affianchiamole quest'altra serie:

(2) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Indicato con a_n il termine generale della serie (1) e con b_n quello della serie (2), è evidente che risulta $b_n \leq a_n$. D'altra parte la serie (2), dopo aver sommato le frazioni con lo stesso denominatore (dopo il numero 1, una frazione ha denominatore 2; 2 hanno denominatore 4; 4 hanno denominatore 8; 8 hanno denominatore 16; …; 2^{n-1} hanno denominatore 2^n), può essere scritta in questo modo:

$$1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

vale a dire:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots.$$

Consideriamo adesso la somma S_n dei primi n termini di questa serie (somma che è ai giorni nostri è denominata *ridotta n-esima* della serie). Risulta:

$$S_n = 1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}\ ;$$

ed è evidente che $S_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Se ne desume che la serie (2) diverge. Quindi diverge pure la serie (1), cioè la serie armonica.

- Utilizzando il risultato precedente, Bernoulli dimostrò, nel quarto dei cinque lavori, che è divergente pure la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots.$$

Per dimostrarlo gli basta confrontare questa serie con la serie armonica e osservare che, per ogni $n\geq 1$, risulta:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}.$$

Esattamente come facciamo al giorno d'oggi.

6. Riguardo alla serie (4), Bernoulli dimostrò che essa converge ad un valore compreso fra 1 e 2. Egli ne trattò nel secondo dei 5 articoli.

Dico, in via preliminare, che il solito procedimento geometrico in questo caso non approda a nulla. Per questo Bernoulli segue un procedimento di tipo aritmetico. Lo descrivo.

Se n è un numero naturale non nullo, si ha evidentemente:

$$n \leq n^2 \quad \text{e quindi} \quad n+n^2 \leq 2\,n^2 \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{1}{n^2}\leq\frac{2}{n+n^2},$$

dove il segno di uguaglianza vale solo nel caso in cui $n=1$.

Si ha dunque, assegnando ad n i successivi valori 1, 2, 3, 4, … :

$$1=\frac{2}{1+1},\quad \frac{1}{4}<\frac{2}{2+4},\quad \frac{1}{9}<\frac{2}{3+9},\quad \frac{1}{16}<\frac{2}{4+16},\quad \dots.$$

Da qui, sommando membro a membro, segue:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots<2\left(\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{3+9}+\frac{1}{4+16}+\cdots\right).$$

Osserviamo adesso che possiamo scrivere:

$$\frac{1}{1+1}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2+4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3+9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4+16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\quad \dots.$$

Cosicché si ha:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{3+9}+\frac{1}{4+16}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots=1.$$

Dunque:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots<2.$$

Siccome, evidentemente, la serie in esame è maggiore di 1, si può concludere che è compresa fra 1 e 2.

Bernoulli non riuscì a calcolare il valore esatto cui la serie converge, anche se ne fornì una buona approssimazione. Il valore esatto fu trovato qualche tempo dopo da Eulero, ma con un procedimento non proprio cristallino. Comunque, egli calcolò che risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.=\frac{\pi^2}{6}.$$

7. La quinta ed ultima dissertazione vede Bernoulli impegnato nello studio della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\ .$$

Se ne era già occupato Leibniz e più tardi se ne sarebbe occupato anche Eulero.

Pure l'italiano Guido Grandi (1671-1742), gesuita e matematico, si interessò a questa serie (1703), notando che poteva assumere più valori.

Un primo tentativo per stabilire se la serie converge o diverge consiste nel raggruppare i suoi termini nel modo seguente:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots,$$

per cui il risultato sarebbe: $0+0+0+\cdots=0$.

D'altro canto il raggruppamento dei termini potrebbe essere quest'altro:

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots\ ,$$

e quindi il risultato sarebbe: $1-0-0-0-\cdots=1$.

Bernoulli non era evidentemente soddisfatto di questa stranezza. È inaccettabile che una stessa serie converga a due valori distinti.

Pensò di seguire un terzo procedimento, un procedimento che aveva già seguito con soddisfazione in un'altra circostanza. Si pone:

$$\mathrm{S}=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\ =1-(1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\ ),$$

ossia, costatando che la quantità in parentesi è proprio S, si ha:

$$\mathrm{S}=1-\mathrm{S}\quad \text{e da qui}\quad \mathrm{S}=\frac{1}{2}.$$

Il risultato fu accettato sia da Leibniz sia da Eulero. Ma non per questo era corretto. Rimaneva, infatti, il paradosso di una molteplicità di valori della somma di una serie.

Cosa che, tra l'altro, si verificava in altri casi scoperti nel corso del XVIII secolo. Il fatto, ovviamente, lasciava sconcertati. Finché i matematici non si resero conto che le somme di infiniti termini non potevano essere trattate come quelle di un numero finito di termini. In queste seconde i raggruppamenti dei termini seguono regole aritmetiche che non valgono più per le prime. A meno che non si fosse già stabilito che tutti i termini della serie sono positivi e la serie stessa è convergente. Quando non è così bisogna trovare procedimenti alternativi per stabilire se la serie converge o diverge o … fa qualche altra cosa.

Con riferimento alla serie di cui ci stiamo occupando, un modo d'indagine prevede il calcolo della somma dei suoi termini, prendendone prima 2, poi 3, successivamente 4, e così via. Con questo procedimento si trova che risulta:

$$1-1=0,\ \ 1-1+1=1,\ \ 1-1+1-1=0,\ \ 1-1+1-1+1=1,\ \ \text{eccetera.}$$

Insomma, si ottengono alternativamente le somme 0 e 1. La serie, dunque, non converge né diverge. È una serie *indeterminata*.

8. Alla luce di quanto appena detto, mi sembra doveroso ritornare sui ragionamenti effettuati per lo studio della serie (4), poiché potrebbe destare qualche perplessità il procedimento seguito da Bernoulli per dimostrarne la convergenza.

In realtà, al giorno d'oggi, si conoscono procedimenti più rigorosi per dimostrare che risulta:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{3+9}+\frac{1}{4+16}+\cdots\ =1\,.$$

Precisamente, seguendo lo stesso procedimento descritto poco sopra, si calcolano le somme parziali della serie e si trova:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}\ ;$$

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{3+9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}\ ;$$

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{3+9}+\frac{1}{4+16}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5}\ ;$$

e, così via, si può costatare che la somma della serie tende a diventare uguale ad 1 meno una quantità che diventa sempre più piccola e perciò tendente a 0, per cui il suo valore è esattamente uguale ad 1. Come aveva dimostrato Bernoulli.

Questo ragionamento, abbastanza intuitivo, se si vuole, può essere formalizzato.

Al riguardo si costata che la serie in esame può essere posta nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots$$

e che i denominatori dei suoi termini possono essere definiti ricorsivamente e precisamente, indicato con a_n il generico denominatore, si ha:

$$a_n=\begin{cases}2 \quad \text{se} \quad n=1\\ a_{n-1}+2n \quad \text{se} \quad n>1\end{cases}$$

Cosicché la serie può essere posta in questa forma:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots.$$

E pertanto, riprendendo alcuni risultati trovati poco sopra, si ha:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{2+1}\ ;$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{3+1}\ ;$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=1-\frac{1}{5}=1-\frac{1}{4+1}\ ;$$

e così via fino ad ottenere:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Siccome:

$$1-\frac{1}{n+1}\to 1 \quad \text{per} \quad n\to\infty$$

possiamo concludere che la serie in questione converge al valore 1.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Jakob Bernoulli, *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita*, Basileae, Johann Conrad à Mechel, 1689.

[2] Jakob Bernoulli, *Positionum de seriebus infinitis, pars tertia, tractans de earum usu in quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum*, Basileae, Johann Conrad à Mechel, 1696.

[3] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, traduzione di Adriano Carugo, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.

[4] William Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica*, traduzione di Antonio Caronia, Bologna, Zanichelli, 1992.

[5] Gustavo Ernesto Piñeiro, *Bernoulli*, traduzione di Claudia Scienza, Milano, RBA Italia, 2017.

[6] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.