Le serie infinite: primi approcci – Parte seconda

di Antonino Giambò

1. Ci occupiamo in questa seconda parte della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

che avevamo accantonato nella prima parte di questo articolo.

In questo caso, un procedimento di tipo geometrico risulterebbe piuttosto complicato, per cui preferisco descriverne uno di tipo aritmetico, come fece d'altronde lo stesso Bernoulli, utilizzando però per comodità, cosa tuttavia non necessaria, un simbolismo che all'epoca di Bernoulli non era ancora in uso.

Considerata allora la serie in questione, poniamo:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \cdots .$$

Moltiplicando per 2 entrambi i membri, si ha:

$$2S = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \cdots\right)$$

ossia:

$$2S = 1 + \left(\frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \cdots\right).$$

Osserviamo ora che il generico termine della serie in parentesi è:

$$\frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \quad \text{con} \quad n \geq 1.$$

Si ha pertanto:

$$2S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{ossia} \quad 2S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

E da qui, tenendo presente che:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = S \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1\,,$$

segue:

$$2S = 1 + S + 1 \quad \text{vale a dire} \quad S = 2.$$

Per la cronaca, Bernoulli pubblicò questo risultato nella seconda dissertazione, come gli altri di cui ci siamo occupati nella prima parte dell'articolo.

In realtà, questa dissertazione, pubblicata il 7 giugno 1689, si occupa di diverse serie infinite e del calcolo della loro somma. Il titolo completo della dissertazione è infatti il seguente: *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita* (figura 1) (*Dissertazioni aritmetiche sulle serie infinite e sulla loro somma finita*).

Una interessante curiosità.

Nella prima pagina di questa dissertazione, dopo la prefazione, figura la seguente proposizione:

IV. *Si sit Progressio Geometrica quaecunque A, B, C, D, E; & alia Arithmetica totidem terminorum A, B, F, G, H, incipiens ab iisdem terminis A & B, erunt reliquorum singuli in Geometrica singulis ordine sibi respondentibus in Arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.*

Si tratta sostanzialmente di quella che è passata alla storia come la *disuguaglianza di Bernoulli*, che nel nostro simbolismo afferma che, per ogni intero $n \geq 0$ e per ogni numero reale $x > -1$, vale la seguente relazione:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Bernoulli la dimostra, come da lui stesso dichiarato, basandola sulla proposizione 25 del V libro degli *Elementi* di Euclide, libro nel quale è esposta la teoria delle proporzioni delle grandezze geometriche.

Dunque, in base a questa proposizione di Bernoulli, se si considerano la progressione aritmetica di primo termine 1 e secondo termine 1+x e la progressione geometrica sempre di primo termine 1 e secondo termine 1+x, l'n-esimo termine della progressione geometrica, ovviamente dopo il 2°, è maggiore dell'n-esimo termine della progressione aritmetica.

Ora, la progressione aritmetica, la cui ragione è evidentemente $(x+1)-1=x$, è la seguente:

$$1,\ 1+x,\ 1+2x,\ 1+3x,\ \ldots\ ,\ 1+nx\,,$$

mentre la progressione geometrica, la cui ragione è $\frac{1+x}{1}=1+x$, è la seguente:

$$1,\ 1+x,\ (1+x)^2,\ (1+x)^3,\ \ldots\ ,\ (1+x)^n.$$

Per cui, in base alla suddetta proposizione di Bernoulli, tenendo anche presente l'uguaglianza dei primi due termini, si ha:

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

Ai giorni nostri sono possibili altre dimostrazioni della disuguaglianza di Bernoulli. E una di esse è basata sul principio d'induzione matematica.

Può essere utile conoscere questa dimostrazione.

La *base dell'induzione* è immediata. Infatti per $n=0$ la relazione diventa $1\geq 1$, certamente vera.

Bisogna far vedere che è vero il *passo induttivo*. Precisamente, ammesso che la relazione sia vera quando ad n si assegna il valore k, bisogna far vedere che è ancora vera quando si assegna k+1. Insomma, posto che sia $(1+x)^k\geq 1+kx$, bisogna dimostrare che è $(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$.

Allora, moltiplicando per 1+x entrambi i membri della prima disuguaglianza, supposta vera, si ha:

$$(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)\text{ , da cui segue: }(1+x)^{k+1}\geq(1+(k+1)x)+kx^2\ ;$$

siccome $kx^2\geq 0$, a più forte ragione $(1+x)^{k+1}\geq(1+(k+1)x)$, che è quello che si doveva dimostrare.

La disuguaglianza $(1+x)^n\geq 1+nx$ è dunque provata in virtù del principio d'induzione.

Bernoulli, poi, nelle tre dissertazioni successive – terza, quarta e quinta - si serve dei risultati ottenuti, compresa la disuguaglianza suddetta, e li usa precisamente per la quadratura delle superfici e per la rettificazione delle curve. Lo specifica chiaramente il titolo completo della terza dissertazione, pubblicata il 14 novembre 1696: *Positionum de seriebus infinitis, pars tertia, tractans de earum usu in quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum* (figura 2) (*Dissertazione sulle serie infinite, parte terza, e trattazione del loro uso nella quadratura delle superfici e nella rettificazione delle curve*).

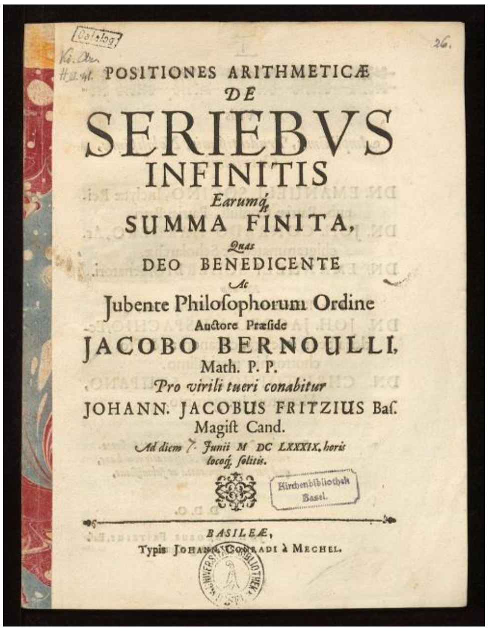
POSITIONES ARITHMETICÆ
DE
SERIEBVS
INFINITIS
Earumq;
SUMMA FINITA,
Quas
DEO BENEDICENTE
Ac
Jubente Philosophorum Ordine
Auctore Præside
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.
Pro virili tueri conabitur
JOHANN. JACOBUS FRITZIUS Bas.
Magist. Cand.
Ad diem 7. Junii M DC LXXXIX, horis locoq; solitis.
BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

figura 1

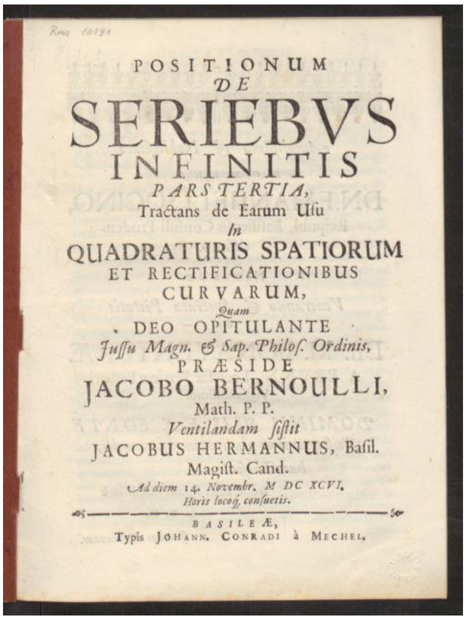
POSITIONUM
DE
SERIEBVS
INFINITIS
PARS TERTIA,
Tractans de Earum Usu
In
QUADRATURIS SPATIORUM
ET RECTIFICATIONIBUS
CURVARUM,
Quam
DEO OPITULANTE
Jussu Magn. & Sap. Philos. Ordinis,
PRÆSIDE
JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.
Ventilandam sistit
JACOBUS HERMANNUS, Basil.
Magist. Cand.
Ad diem 14. Novembr. M DC XCVI,
Horis locoq; consuetis.
BASILEÆ,
Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.

figura 2

2. Seguendo un procedimento simile a quello esposto poco sopra, pur senza utilizzare il simbolismo da noi utilizzato, e sempre nella seconda dissertazione, Bernoulli dimostrò la convergenza di altre due serie e ne calcolò anche la somma. Precisamente trovò che:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}=26\,.$$

- Dimostriamo il primo di questi risultati, adattando sostanzialmente il procedimento precedente alla nuova situazione. Poniamo allora che si ha:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}+\frac{36}{64}+\cdots\ .$$

Moltiplicando per 2 entrambi i membri, si ottiene:

$$2S=1+\left(\frac{4}{2}+\frac{9}{4}+\frac{16}{8}+\frac{25}{16}+\frac{36}{32}+\cdots\ \right).$$

Si costata facilmente che il generico termine della serie racchiusa dentro parentesi è:

$$\frac{(n+1)^2}{2^n}=\frac{n^2}{2^n}+\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\quad \text{con}\quad n\geq 1\,.$$

Risulta pertanto:

$$2S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}+\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)\quad \text{ossia}\quad 2S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,.$$

E da qui, in base ai risultati ottenuti in precedenza, segue:

$$2S=1+S+2\cdot 2+1\quad \text{vale a dire}\quad S=6\,.$$

- Dimostriamo il secondo dei suddetti risultati, con lo stesso sistema. Poniamo allora che si ha:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{8}{4}+\frac{27}{8}+\frac{64}{16}+\frac{125}{32}+\frac{216}{64}+\cdots\ .$$

Moltiplicando per 2 entrambi i membri, si ottiene:

$$2S=1+\left(\frac{8}{2}+\frac{27}{4}+\frac{64}{8}+\frac{125}{16}+\frac{216}{32}+\cdots\ \right).$$

Si costata che il generico termine della serie racchiusa dentro parentesi è:

$$\frac{(n+1)^3}{2^n}=\frac{n^3}{2^n}+\frac{3n^2}{2^n}+\frac{3n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\quad \text{con}\quad n\geq 1\,.$$

Risulta pertanto:

$$2S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{2^n}+\frac{3n^2}{2^n}+\frac{3n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)\quad \text{ossia}\quad 2S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,.$$

E da qui, tenendo presenti risultati ottenuti in precedenza, segue:

$$2S=1+S+3\cdot 6+3\cdot 2+1\quad \text{vale a dire}\quad S=26\,.$$

3. Nella seconda dissertazione Bernoulli trova la somma di diverse altre serie convergenti. In particolare, utilizzando i risultati ottenuti, dimostra che si ha:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}+\frac{15}{32}+\cdots=4\,,\qquad \frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}+\frac{35}{32}+\cdots=8\,.$$

Vediamo in che modo, ma usando ancora il nostro simbolismo.

- Riguardo alla prima serie, bisogna osservare che i numeratori delle frazioni formano la successione:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots\ .$$

Si tratta dei noti *numeri triangolari*, il generico dei quali è: $\frac{n(n+1)}{2}$ **,** per cui la serie si può mettere nella forma seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2^n}\quad \text{o anche}\quad \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n}\right)\quad \text{ossia}\quad \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\right).$$

Ricordando che la prima serie in parentesi ha somma 6 e la seconda ha somma 2, ne consegue che la somma S della serie è:

$$S = \frac{1}{2}(6+2) = 4\,.$$

- Circa la seconda serie, osserviamo che i numeratori delle frazioni formano la successione:

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ \ \dots\ .$$

Si tratta dei cosiddetti *numeri piramidali*, il generico dei quali è: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, per cui la serie può essere indicata in questa maniera:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}{2^n} \quad \text{o anche} \quad \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{2^n}\right) \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\right).$$

Ne consegue, in base ai valori noti delle somme delle serie in parentesi, che la somma S della serie è:

$$S = \frac{1}{6}(26+3\cdot 6+2\cdot 2) = 8\,.$$

4. Si può andare oltre. In particolare, si può trovare una formula che, generalizzando alcuni risultati precedenti, consente di calcolare la somma S_k della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{2^n} \quad \text{qualunque sia l'intero } k \geq 0\,.$$

Ribadito che per $k=0$ risulta:

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1\,,$$

la formula, per $k\geq 1$, è esattamente la seguente:

$$(1) \qquad S_k = 1 + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} S_{k-j}\,,$$

ossia, scritta per esteso:

$$(1') \qquad S_k = 1 + \binom{k}{1}S_{k-1} + \binom{k}{2}S_{k-2} + \binom{k}{3}S_{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}S_1 + \binom{k}{k}S_0\,.$$

Per dimostrarla ragioniamo come nei casi precedenti.

Poniamo dunque:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{2^n}$$

e moltiplichiamo per 2 entrambi i membri di questa uguaglianza. Otteniamo:

$$2\,S_k = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^k}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^k}{2^n}.$$

È noto, d'altro canto, in base allo sviluppo del binomio di Newton, che si ha:

$$(n+1)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}n^{k-j} = \binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \binom{k}{3}n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}n + \binom{k}{k}.$$

Risulta pertanto:

$$2\,S_k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \binom{k}{3}n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}n + \binom{k}{k}}{2^n}$$

ossia:

$$2\,S_k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n} + \binom{k}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{2^n} + \binom{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-2}}{2^n} + \binom{k}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-3}}{2^n} + \cdots + \binom{k}{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \binom{k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Vale a dire:

$$2\,S_k = 1 + S_k + \binom{k}{1} S_{k-1} + \binom{k}{2} S_{k-2} + \binom{k}{3} S_{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1} S_1 + \binom{k}{k} S_0 .$$

Da qui segue facilmente la formula (1).

La possiamo utilizzare per confermare alcuni risultati ottenuti in precedenza. Precisamente:

- per k=1 (Suiseth, XIV sec.):

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{1} \binom{1}{j} S_{1-j} = 1 + \binom{1}{1} S_0 = 1 + 1 \cdot 1 = 2\,;$$

- per k=2 (Bernoulli, 1689):

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{2} \binom{2}{j} S_{2-j} = 1 + \binom{2}{1} S_1 + \binom{2}{2} S_0 = 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6\,;$$

- per k=3 (Bernoulli, 1689):

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} S_{3-j} =$$

$$= 1 + \binom{3}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_1 + \binom{3}{3} S_0 = 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 26\,.$$

Ma possiamo andare oltre questi risultati e ottenere, per esempio:

- per k=4:

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{4} \binom{4}{j} S_{4-j} = 1 + \binom{4}{1} S_3 + \binom{4}{2} S_2 + \binom{4}{3} S_1 + \binom{4}{4} S_0 =$$

$$= 1 + 4 \cdot 26 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 150\,.$$

- per k=5:

$$S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{5} \binom{5}{j} S_{5-j} = 1 + \binom{5}{1} S_4 + \binom{5}{2} S_3 + \binom{5}{3} S_2 + \binom{5}{4} S_1 + \binom{5}{5} S_0 =$$

$$= 1 + 5 \cdot 150 + 10 \cdot 26 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1.082\,.$$

- per k=6:

$$S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^n} = 1 + \sum_{j=1}^{6} \binom{6}{j} S_{6-j} = 1 + \binom{6}{1} S_5 + \binom{6}{2} S_4 + \binom{6}{3} S_3 + \binom{6}{4} S_2 + \binom{6}{5} S_1 + \binom{6}{6} S_0 =$$

$$= 1 + 6 \cdot 1.082 + 15 \cdot 150 + 20 \cdot 26 + 15 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9.366\,.$$

E così per altri risultati che si possono ottenere applicando la formula (1).

Si comprende ovviamente che per calcolare S_k mediante la formula, è necessario conoscere tutte le somme ottenute per i valori minori di k, da S_0 a S_{k-1}.

5. È possibile un'ulteriore generalizzazione della formula in questione.

Al riguardo, riprendiamo la relazione:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}\,, \quad \text{con} \quad k \geq 0.$$

Solo che adesso, al posto di 2^n, prendiamo q^n, dove q è un qualsiasi numero reale maggiore di 1.

Poniamo dunque:

$$S_{(k,q)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{q^n}\,,$$

dove k è un intero qualsiasi non negativo e q è un qualunque numero reale maggiore di 1.

Calcoliamo in via preventiva $S_{(0,\,q)}$, vale a dire il valore di $S_{(k,q)}$ per k=0. Si ha:

$$S_{(0,\,q)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^n} + \cdots \ .$$

Si costata che $S_{(0,\,q)}$ è una progressione geometrica di infiniti termini, di primo termine $1/q$ e ragione $1/q<1$. Si trova facilmente che risulta:

$$S_{(0,\,q)} = \frac{1}{q-1}.$$

Appurato questo, ripetiamo l'intero ragionamento eseguito nel caso in cui era q=2.

Non cambia praticamente nulla, salvo il fatto che adesso, come ho già detto, al posto di 2^n, troviamo q^n, e questo implica qualche adattamento, ma niente di trascendentale.

Otteniamo così la seguente formula, più generale di quella già trovata:

$$S_{(k,q)} = \frac{1}{q-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\, S_{(k-j\,,q)}\right). \tag{2}$$

Naturalmente per q=2 si ritrova la formula (1).

Vediamo qualche esempio per q=3.

Dopo aver costatato che:

$$S_{(0,\,3)} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2},$$

otteniamo allora:

- per k=1:

$$S_{(1,3)} = \frac{1}{3-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{1} \binom{1}{j} S_{(1-j,3)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \binom{1}{1} \cdot S_{(0,3)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\ ;$$

- per k=2:

$$S_{(2,3)} = \frac{1}{3-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{2} \binom{2}{j} S_{(2-j,3)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \binom{2}{1} \cdot S_{(1,3)} + \binom{2}{2} \cdot S_{(0,3)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\ ;$$

- per k=3:

$$S_{(3,3)} = \frac{1}{3-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} S_{(3-j,3)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \binom{3}{1} \cdot S_{2,3} + \binom{3}{2} \cdot S_{(1,3)} + \binom{3}{3} \cdot S_{(0,3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{33}{8}.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Jakob Bernoulli, *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita*, Basileae, Johann Conrad à Mechel, 1689.

[2] Jakob Bernoulli, *Positionum de seriebus infinitis, pars tertia, tractans de earum usu in quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum*, Basileae, Johann Conrad à Mechel, 1696.

[3] Gustavo Ernesto Piñeiro, *Bernoulli*, traduzione di Claudia Scienza, Milano, RBA Italia, 2017.

[4] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.