I numeri di Bernoulli

di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo (*Le serie infinite, primi approcci - 1*) ho fatto un cenno alla serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

Di questa serie si occupò per primo il sacerdote e matematico bolognese **Pietro Mengoli** (1626-1686), dimostrandone la convergenza ad un valore compreso fra 1 e 2, ma senza riuscire a calcolare il valore esatto cui essa converge.

Dopo di lui, altri hanno impiegato il loro tempo sulla stessa serie e, in particolare, se ne è occupato lo svizzero **Jakob Bernoulli** (1655-1705), il quale pure ne dimostrò la convergenza e calcolò che la serie dovesse convergere ad un valore di poco inferiore a 1,645 ma neppure lui, come d'altro canto tutti quelli che si cimentarono nell'impresa, riuscì a calcolare il valore esatto.

Ci riuscì invece Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783), ma con procedimenti (ne propose più d'uno) non esattamente cristallini, Egli, infatti, utilizzò regole algebriche valide nei casi finiti applicandole impropriamente a polinomi di infiniti termini.

Questo, comunque, il risultato cui Eulero pervenne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pur con il limite segnalato, quando comparve nel 1735, la sua dimostrazione fece scalpore e suscitò ammirazione per diversi motivi: primo, veniva risolto un annoso problema; secondo, era la prima volta che il numero π si presentava in una questione che sembrava non avere nulla a che fare con la geometria; terzo, il risolutore era un giovane di 28 anni.

Jean Bernoulli (1667-1748), fratello di Jakob, che nel frattempo era morto [2, pag. 514], così commentò l'evento:

« *E così viene soddisfatto l'ardente desiderio di mio fratello che, rendendosi conto che la ricerca di tale somma era più difficile di quanto si sarebbe potuto pensare, confessava apertamente che tutti i suoi più ferventi sforzi erano stati vani. Se almeno fosse vivo ora*! »

Il problema consistente nel determinare la somma di questa serie passò alla storia come ***problema di Basilea*** e la serie stessa è a volte denominata *serie di Basilea*. Non è chiarissima la ragione di questa denominazione, ma i più ipotizzano che ciò fu dovuto al fatto che sia Bernoulli sia Eulero erano nativi della città svizzera di Basilea.

Dicevamo dei procedimenti non pienamente convincenti di Eulero per risolvere il problema di Basilea. Questo per lo meno all'inizio, poiché infatti anni dopo riuscì a darne dimostrazioni ineccepibili. Ma lo vedremo più avanti.

Oggigiorno, del problema di Basilea si conoscono diverse dimostrazioni rigorose attribuite a matematici vari e piuttosto recenti. In [1, pagg. 41-48] gli autori ne presentano tre. Le prime due non sono certamente alla portata di studenti liceali. Ma per la terza un tentativo si può fare, benché non è esattamente una passeggiata di salute.

Cito direttamente da [1, pag. 44] un passo riguardante proprio questa dimostrazione:

« Essa appare in una serie di esercizi in un libro di problemi dei gemelli Akiva e Isaak Yaglom, la cui edizione russa originale apparve nel 1954. Versioni di questa splendida dimostrazione furono riscoperte e presentate da F. Holme (1970). I. Papadimitriou (1973), e da Ransford (1982) che la attribuì a John Scholes ».

Aggiungo, di mio, che la dimostrazione del 1982, attribuita all'informatico britannico John Morley Scholes (1948-2019), comparve nella rivista *Eureka*, una rivista che l'associazione matematica studentesca *The Archimedeans* dell'Università di Cambridge pubblica fin dal 1939.

Sul problema di Basilea, Matmedia ha ospitato diversi lavori e, in particolare, uno di **Luigi Verolino** (2016) ed uno di **Emilio Ambrisi** (2020). Per cui evito di occuparmene anch'io e a quegli articoli rimando chi volesse saperne di più. Qui mi limito solamente a far notare che il valore della somma trovata da Eulero, approssimato al 4° decimale, è 1,6449 e differisce di un niente rispetto al valore trovato da Bernoulli.

2. La serie di Basilea e la serie armonica sono casi particolari di una serie – indicata dallo stesso Eulero con il simbolo $\zeta(s)$ (si legge: zeta di s), ma passata alla storia come *funzione zeta di Riemann* – tale che:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \ .$$

In particolare $\zeta(1)$ è la serie armonica e $\zeta(2)$ è la serie di Basilea.

La serie $\zeta(s)$ è divergente solamente per $s=1$, mentre è convergente per ogni s naturale maggiore di 1.

Che sia convergente per $s=2$ lo abbiamo già detto. Che lo sia per $s>2$ si dimostra facilmente. Basta ricorrere al criterio del confronto.

Di fatto, se diciamo a_n il termine n-esimo della serie $\zeta(s)$, con $s>2$, e diciamo b_n il termine n-esimo della serie di Basilea, si spiega facilmente che è $a_n \leq b_n$, per cui, essendo convergente la serie di termine generale b_n, in virtù del criterio del confronto è convergente anche la serie di termine generale a_n.

Ora, però, come nel caso $s=2$, una cosa è sapere che la serie $\zeta(s)$, con $s>2$, è convergente, altra storia è trovarne la somma. Comunque sia, Eulero è riuscito a determinare tali somme per s pari. In particolare, ha trovato i seguenti valori:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}082323\ldots\ , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1{,}017343\ , \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9.450} = 1{,}004077\ .$$

Successivamente, nel 1739, ha trovato una formula generale per $\zeta(2k)$, qualunque sia k intero positivo. E, come casi particolari, ha ritrovato i valori precedenti, compreso il valore cui converge la serie di Basilea e risolvendo così in modo rigoroso il problema di Basilea [(1)].

La formula in questione è la seguente:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}\ ,$$

dove B_{2k} sono numeri particolari, denominati ***numeri di Bernoulli***.

Ma cosa sono esattamente questi numeri? E soprattutto come si calcolano?

Ecco, scopo di questo contributo è fornire una risposta a questi interrogativi e descrivere inoltre qualche caso, oltre alla formula di Eulero, in cui i numeri di Bernoulli sono utilizzati.

3. Incominciamo col prendere in considerazione la seguente successione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

e soffermiamoci sui suoi valori, al variare di k, essendo k un numero intero positivo.

Osserviamo per prima cosa che il valore della successione per $k=1$ si trova facilmente con considerazioni algebriche:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Anche i valori per $k>1$ si possono trovare con considerazioni algebriche. Jakob Bernoulli (1655-1705) lo ha fatto e ha ottenuto i seguenti risultati (la fattorizzazione è una mia aggiunta):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)\ ;$$

[1] Un'altra risoluzione rigorosa del problema di Basilea fu fornita da Eulero nel 1741. Questa risoluzione è basata, non più sui numeri di Bernoulli, ma sulle tecniche del calcolo integrale. Tecniche che lo stesso Eulero contribuì a perfezionare.

$$\sum_{i=1}^{n} i^{3} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}\ n^2\ (n+1)^2\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^{4} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{30}\ n\ (n+1)\ (2n+1)\ (3n^2+3n-1)\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^{5} = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{12}\ n^2\ (n+1)^2\ (2n^2+2n-1)\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^{6} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \frac{1}{42}\ n\ (n+1)\ (2n+1)\ (3n^4+6n^3-3n+1)\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{24}\ n^2\ (n+1)^2\ (3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^{8} = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n =$$
$$= \frac{1}{90}\ n\ (n+1)\ (2n+1)\ (5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)\ .$$

Queste formule sono contenute nell'opera principale di Bernoulli, *Ars conjectandi* (*L'arte della congettura*), pubblicata postuma nel 1713.

Quest'opera si compone di 4 parti e di un'appendice (figura 1).


JACOBI BERNOULLI,

ARS CONJECTANDI,

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

DE LUDO PILÆ

RETICULARIS.

BASILEÆ,

THURNISIORUM,

figura 1

Le 4 parti si possono considerare un vero e proprio trattato di calcolo delle probabilità.

La prima di esse, fatta eccezione per le interessanti annotazioni di Bernoulli, altro non è che una riproduzione del *De Ratiociniis in Ludo Aleae* del matematico olandese **Christian Huygens** (1629-1695).

Le formule suddette figurano nella seconda parte sotto il titolo *Summae Potestatum* (*Somme di Potenze*).

L'appendice consta, a sua volta, di due parti: la prima si occupa delle serie infinite e della somma di quelle convergenti, la seconda applica i risultati ottenuti al calcolo delle aree delle superfici ed alla rettificazione delle curve. In sostanza l'appendice riprende, praticamente riproducendole, le 5 dissertazioni pubblicate fra il 1684 e il 1704, quando Bernoulli era vivo e vegeto. Tanto per dire, la seconda dissertazione è riprodotta tale e quale, con la prefazione e le sue 17 proposizioni, compresa la proposizione IV con enunciato e dimostrazione di quella che poi è stata denominata "disuguaglianza di Bernoulli" (vedi articoli *Le serie infinite – primi approcci –* parti 1 e 2).

Ritornando alle formule di Bernoulli, in realtà non solo erano state trovate dal matematico e ingegnere tedesco Johann Faulhaber (1580-1635), che le aveva pubblicate nel 1631 in un'opera, scritta in tedesco, dal titolo *Academia Algebrae*, ma le prime di esse (per k=1, k=2, k=3) erano note fin dai tempi antichi, benché enunciate in forma retorica e senza l'uso del simbolismo algebrico che era di là da venire (k=1: Pitagorici – VI sec. a.C.; k=2: Archimede – III sec. a.C.; k=3: Nicomaco I-II sec. d.C.). Anche la formula per k=4 era conosciuta: l'aveva trovata poco tempo prima lo studioso inglese Thomas Harriot (1560-1621), che aveva trovato pure le formule per le prime tre potenze di k.

« Tuttavia – commenta giustamente Piñeiro [5, pag. 142] – Bernoulli andò oltre e cercò una regolarità che collegasse tutte le formule, cioè cercò un modo generale di calcolare la somma $1^k+2^k+3^k+...+n^k$, dove k è un intero positivo qualsiasi ».

4. Bernoulli, in effetti, trovò la seguente formula generale per la somma delle potenze di esponente k, con k intero positivo qualsiasi:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \sum_{i=0}^{k} B_i \cdot \frac{(n+1)^{k-i+1}}{k-i+1} \cdot \binom{k-i+1}{i} =$$

$$= B_0 \cdot \frac{(n+1)^{k-0+1}}{k-0+1} \cdot \binom{k+1}{0} + B_1 \cdot \frac{(n+1)^{k-1+1}}{k-1+1} \cdot \binom{k-1+1}{1} +$$

$$+ B_2 \cdot \frac{(n+1)^{k-2+1}}{k-2+1} \cdot \binom{k-2+1}{2} + B_3 \cdot \frac{(n+1)^{k-3+1}}{k-3+1} \cdot \binom{k-3+1}{3} + \cdots .$$

Ossia:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^{k} = B_0 \cdot \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} + B_1 \cdot \frac{(n+1)^{k}}{k} \cdot \frac{k}{1!} +$$

$$+ B_2 \cdot \frac{(n+1)^{k-1}}{k-1} \cdot \frac{k\,(k-1)}{2!} + B_3 \cdot \frac{(n+1)^{k-2}}{k-2} \cdot \frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{3!} + \cdots .$$

I numeri B_i sono quelli che De Moivre [2] ed Eulero avrebbero denominato ***numeri di Bernoulli***. Si ottengono con la seguente formula ricorsiva:

$$B_i = \begin{cases} 1 \quad \text{per } \; i=0 \\ -\dfrac{1}{i+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{i+1}{k} B_k \quad \text{per } \; i>0 \end{cases}$$

In particolare:

$B_0 = 1$;

$$B_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{0} \binom{2}{k} B_k = -\frac{1}{2} \binom{2}{0} B_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2} \;;$$

$$B_2 = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{k} B_k = -\frac{1}{3}\left[\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1\right] = -\frac{1}{3} \cdot \left[1 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{6} \;;$$

$$B_3 = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{k} B_k = -\frac{1}{4}\left[\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2\right] = -\frac{1}{3} \cdot \left[1 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{6}\right] = 0\,.$$

Una tabella (tabella 1) registra i valori di B_i per $0 \le i \le 12$. Non sono indicati i valori di B_i per i>1 e dispari, semplicemente perché questi valori sono tutti uguali a 0, come B_3. Vale a dire che:

$$B_{2j+1}=0 \quad \text{per ogni naturale } j>0.$$

---

[2] Abraham De Moivre, matematico francese, 1667-1754.

i	0	1	2	4	6	8	10	12
B_i	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2.730}$

tabella 1

A volte, invece di $B_1=-1/2$ è usata la variante $B_1=1/2$.

Per completezza d'informazione, bisogna precisare che un altro matematico, il giapponese Takakuza Seki Kōwa (1642-1708) scoprì lo stesso risultato di Bernoulli. Anche il lavoro di questo matematico fu pubblicato dopo la sua morte, nel 1712, cioè un anno prima della pubblicazione dell'*Ars conjectandi*.

C'è chi sostiene, forse per questo, che Kōwa abbia anticipato Bernoulli nella scoperta, ma, essendo state pubblicate postume le opere di entrambi, risulta francamente difficile stabilire di chi sia la primogenitura.

A me piace pensare che i due matematici siano pervenuti allo stesso risultato senza conoscere l'uno i contributi dell'altro.

5. Vediamo adesso come, utilizzando i numeri di Bernoulli e in particolare lo sviluppo (2), si ritrovino le formule che forniscono la somma delle potenze k-esime dei primi n numeri naturali a partire da 1.

Lo facciamo per i primi 3 valori di k, ma si potrebbe continuare:

per k=1: $$\sum_{i=1}^{n} i = B_0 \cdot \frac{(n+1)^{1+1}}{1+1} + B_1 \cdot \frac{(n+1)^{1}}{1} \cdot \frac{1}{1!} = 1 \cdot \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)\,;$$

per k=2: $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = B_0 \cdot \frac{(n+1)^{2+1}}{2+1} + B_1 \cdot \frac{(n+1)^{2}}{2} \cdot \frac{2}{1!} + B_2 \cdot \frac{(n+1)^{2-1}}{2-1} \cdot \frac{2\,(2-1)}{2!} =$$
$$= 1 \cdot \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot (n+1) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\;;$$

per k=3: $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = B_0 \cdot \frac{(n+1)^{3+1}}{3+1} + B_1 \cdot \frac{(n+1)^{3}}{3} \cdot \frac{3}{1!} + B_2 \cdot \frac{(n+1)^{3-1}}{3-1} \cdot \frac{3\,(3-1)}{2!} + 0 =$$
$$= 1 \cdot \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{(n+1)^2}{2} \cdot 3 = \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2\,.$$

Riprendiamo, a questo punto, da dove siamo partiti, ossia dalla formula di Eulero che utilizza i numeri di Bernoulli per ricalcolare i valori che la funzione "zeta" assume in 2, 4, 6, 8, vale a dire, tenendo presente la formula:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\,\frac{(2\pi)^{2k}\,B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}\,,$$

per i seguenti valori di k: k=1, k=2, k=3, k=4.

Si ha dunque:

per k = 1: $$\zeta(2) = (-1)^2 \frac{(2\pi)^2\,B_2}{2 \cdot 2!} = 1 \cdot \frac{4\,\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6}\;;$$

per k = 2: $$\zeta(4) = (-1)^3 \frac{(2\pi)^4\,B_4}{2 \cdot 4!} = -1 \cdot \frac{16\,\pi^4}{48} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{9}\;;$$

per k = 3: $$\zeta(6) = (-1)^4 \frac{(2\pi)^6\,B_6}{2 \cdot 6!} = 1 \cdot \frac{64\,\pi^6}{1.440} \cdot \frac{1}{42} = \frac{\pi^6}{945}\;;$$

per k = 4: $$\zeta(8) = (-1)^5 \frac{(2\pi)^8\,B_8}{2 \cdot 8!} = -1 \cdot \frac{256\,\pi^8}{80.640} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^8}{9.450}\,.$$

Valori che, comunque, Eulero era riuscito a trovare ignorando la connessione con i numeri di Bernoulli. Successivamente, quando si rese conto di quella connessione, ritrovò per conferma gli stessi valori che aveva già trovato.

Il primo esempio (k=1) mostra tra l'altro – lo ribadisco – la risoluzione del problema di Basilea senza riserve di tipo concettuale.

Ed è la prima volta che questo accade. Ricordo che Eulero trovò nel 1739 la formula dalla quale poi discendono quei valori.

Da tutto ciò emerge, ad ogni modo, un fatto significativo: « … i numeri di Bernoulli trascesero il loro scopo originale e risultarono utili in altre applicazioni e proprietà » [5, pag. 143].

6. In particolare, con l'affermazione e lo sviluppo dell'Analisi Matematica, cui contribuirono gli stessi Jakob Bernoulli e Leonhard Euler, si scoprì il seguente interessante legame fra i numeri di Bernoulli e grandezze e funzioni tipiche dell'Analisi:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} \ ,$$

dove "e" è la base dei logaritmi naturali.

Ci soffermiamo per una verifica di questa formula, quantunque parziale perché riferita ai primi valori di n. Precisamente: $n=0, n=1, n=2, n=3$.

Si tratta sostanzialmente di far vedere che, sviluppando la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

in serie di Taylor, centrata in 0, si ottiene uno sviluppo che si identifica con il 2° membro della formula.

Ora si ha:

$$\frac{x}{e^x - 1} = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

mentre:

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = B_0 + B_1\frac{x}{1!} + B_2\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!} + \cdots \ .$$

Basta allora far vedere che risulta:

$f(0) = B_0 = 1$,

$f'(0) = B_1 = -\frac{1}{2}$,

$f''(0) = B_2 = \frac{1}{6}$,

$f'''(0) = B_3 = 0$,

e così via.

Si tratta, in definitiva, di risolvere un esercizio di Analisi Matematica.

A dire il vero, c'è un intoppo, almeno apparentemente. Ed è il fatto che la funzione f(x) e le sue derivate successive non sono definite in 0 e, pertanto, sono ivi discontinue. Ma la discontinuità è solo apparente. È infatti una discontinuità eliminabile. Insomma esistono e sono finiti i limiti della funzione e delle sue derivate successive per $x \to 0$.

A titolo di esempio, tenendo presente la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1 \ .$$

Aggiungo che al giorno d'oggi non si conosce alcuna formula per $\zeta(2k+1)$, vale a dire per i casi in cui è dispari l'argomento della funzione zeta.

Questo non significa però che non si riescano a calcolare valori di $\zeta(2k+1)$, quantunque approssimati. A titolo di curiosità, ho calcolato, naturalmente con l'ausilio di uno strumento di calcolo automatico, i valori di $\zeta(s)$, per n variabile da 1 a 400 e per i valori di s da 2 a 9. I valori trovati, approssimati per difetto al 4° decimale sono riportanti in una tabella (tabella 2) e rappresentati con un istogramma (figura 2).

Si può intuire che ζ(s)→1 per s→∞. Il che ovviamente non ha nulla di sorprendente, se si considera che nella funzione ζ(s) tutti i termini, dopo il primo che è uguale a 1, tendono a 0 quando s tende a infinito.

s	2	3	4	5	6	7	8	9
$\zeta(s) \approx \sum_{k=1}^{400} \frac{1}{k^s}$	1,6424	1,2020	1,0823	1,0369	1,0173	1,0083	1,0040	1,0020

tabella 2

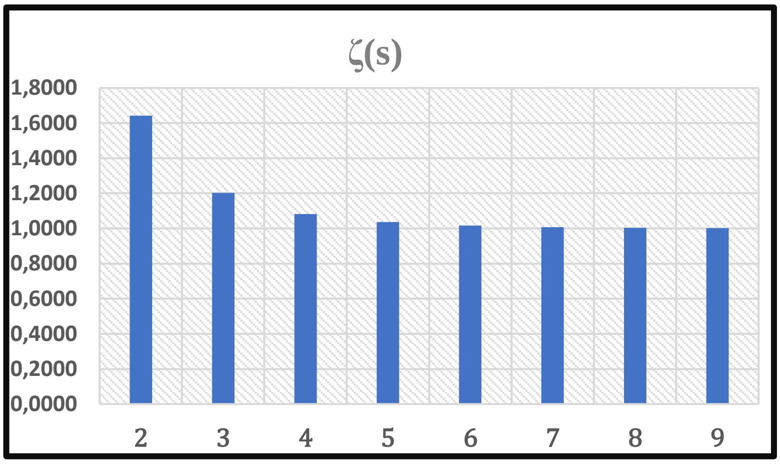

figura 2

7. Concludo con una curiosità riguardante una "controversia" sulla data di nascita di Jakob Bernoulli.
Secondo alcuni è il 27 dicembre 1654, secondo altri il 6 gennaio 1655.
Come mai questa differenza?
Il fatto è che i primi valutano secondo il *calendario giuliano*, promulgato da Giulio Cesare nell'anno 46 a.C.
I secondi valutano in base al *calendario gregoriano*, introdotto il 4 ottobre 1582 da Papa Gregorio XIII, al secolo Ugo Boncompagni, e in uso ancora ai giorni nostri in quasi tutti i paesi del mondo.
Questo Papa, dopo aver costatato che c'era una discrepanza fra le date indicate dagli almanacchi dell'epoca e i giorni effettivi in cui si verificavano i solstizi e gli equinozi, al fine di eliminare quella differenza decretò che il successivo del giorno 5 ottobre 1582 sarebbe stato, non il 6 ottobre, bensì il 15 ottobre, con un salto di 10 giorni.
Esattamente i 10 giorni di differenza fra le due date in cui è fissata la nascita di Bernoulli.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Martin Aigner – Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, edizione italiana a cura di Alfio Quarteroni, Milano, Springer, 2006.
[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
[3] Antonino Giambò, *Una speciale successione convergente e uno spunto per un percorso didattico*, in Periodico di matematiche, N° 3, 2005.
[4] Joaquìn Navarro Sandalinas, *Eulero*, collana Geni della Matematica, Milano, RBA Italia, 2017, pagg. 60-63.
[5] Gustavo Ernesto Piñeiro, *Bernoulli*, collana Geni della Matematica, Milano, RBA Italia, 2017, pagg. 20-42, 141-143.