Proposta di un problema per l'Esame di Stato

nel Liceo Scientifico

Sulle caratteristiche di una funzione trascendente esponenziale e l'invertibilità di una restrizione della stessa.

Applicazioni dei teoremi della derivata della funzione inversa e della media integrale

Problema

a) Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x)=x-2^x$. Si riconosca che ammette un punto x_0 di massimo assoluto. Determinare x_0 ed $f(x_0)$.

b) Riconosciuto che nell'intervallo A=[x_0;2] la funzione è strettamente decrescente, determinare il suo codominio B. Dopo aver giustificato che la restrizione della funzione all'intervallo [x_0;2] è invertibile, precisare il tipo di monotonia della funzione inversa $f^{-1}:B\to A$ adducendo adeguate argomentazioni.

c) In merito all'invertibilità della restrizione della funzione $y=f(x)$ all'intervallo [x_0;2], calcolare la derivata della sua inversa nel punto $y_0=f\left(\frac{3}{2}\right)$, giustificando adeguatamente il procedimento seguito.

d) Enunciare il **teorema della media integrale** per una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo chiuso [a;b] ed ivi continua. Ciò fatto, determinare il valore medio della funzione $y=f(x)$ relativamente all'intervallo [x_0;2].

Elaborazioni

a) La funzione in oggetto è trascendente ed è definita su tutto R. È anche derivabile in tutto il suo dominio di definizione e risulta $f'(x)=1-2^x\cdot\ln(2)$.

Per la monotonia studiamo la disequazione $f'(x)=1-2^x\cdot\ln(2)\geq 0$. La disequazione è soddisfatta per i valori $x\leq\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$; pertanto, la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $\left]-\infty;\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right[$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left]\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right);+\infty\right[$; il punto $x_0=\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ è punto di massimo relativo e poiché la funzione è continua e definita nell'intervallo reale R **il punto è anche di massimo assoluto**. Risulta

$$x_0=\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)=0,5287663\ldots .$$

Il valore del massimo è $f\left(\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right)=\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)-2^{\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)}= \; =0,5287663729\ldots-1,442695041\ldots \;\approx -0,9139286681$.

b) Restrizione della funzione all'intervallo A=[x_0;2]= [0,5287663…;2]

La restrizione della funzione in oggetto $y=f(x)$ all'intervallo [0,5287663…;2] ha le proprietà di essere continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo e con la derivata prima diversa da zero in ciascun punto interno allo stesso intervallo [(1)], precisamente è negativa: $f'(x)=1-2^x\cdot\ln(2)<0$. Ciò permette di affermare che la funzione nell'intervallo in esame è strettamente decrescente, assume il massimo assoluto nel primo estremo $x_0=\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)$ e il minimo assoluto nel secondo estremo dell'intervallo x=2; i rispettivi i valori sono:

$$f\left(\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right)= \approx -0{,}9139286681\,,\quad f(2)=2-2^2=-2\,.$$

La funzione è pertanto invertibile e la sua inversa è così definita:

$f^{-1}:B\to A$, in dettaglio

$$f^{-1}:\left[f(2);f\left(\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right)\right]\to[0{,}5287663\ldots;2]\text{, cioè } f^{-1}:[-2;-0{,}9139286681\ldots]\to[0{,}5287663\ldots;2]$$

Anche la funzione $f^{-1}:B\to A$ è strettamente decrescente. Dimostriamolo.

Siano x', x'' elementi di A, per ipotesi con $x'<x''$; ebbene, per la stretta decrescenza di f in A risulta y'=f(x')> y''=f(x'').

Prendiamo ora in B due punti distinti y_1, y_2 tali che $y_1<y_2$ e siano $f^{-1}(y_1)=x_1$, $f^{-1}(y_2)=x_2$ le corrispondenti antimmagini. Dimostriamo che deve essere necessariamente $x_1>x_2$, sussiste cioè la tesi $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$.

Dimostrazione

Se fosse $x_1=x_2$ allora si avrebbe $f(x_1)=f(x_2)$ e dalla definizione di antimmagine $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, si dedurrebbe $y_1=y_2$. Ciò non può essere perché per ipotesi $y_1<y_2$.

Se fosse $x_1<x_2$ allora, per la stretta decrescenza della funzione f nell'intervallo A si avrebbe la disuguaglianza $f(x_1)>f(x_2)$ e quindi $y_1>y_2$ e questa disuguaglianza contrasta con l'ipotesi $y_1<y_2$; quindi non può neanche essere $x_1<x_2$.

Ricordata la **proprietà di tricotomia** valida **nel campo dei numeri reali R** secondo la quale, presi due qualsiasi numeri reali x ed y sussiste solo una delle tre seguenti relazioni:

$$x<y,\qquad x=y,\qquad x>y,$$

per quanto concerne i punti reali x_1, x_2, avendo dimostrato che non sussistono le due relazioni $x_1=x_2$, $x_1<x_2$, si conclude che sussiste la terza relazione $x_1>x_2$ e quindi che vale la disuguaglianza $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$. C.V.D.

---

(1) Infatti, la derivata prima si annulla solo nell'estremo $x_0=\log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)=0{,}5287663\ldots$

Osservazione didattica

Cogliamo l'opportunità per precisare che la dimostrazione precedente relativa alla stretta decrescenza della funzione inversa $f^{-1}: B \to A$ oggetto del quesito permette di affermare che quando si ha una funzione reale di variabile reale f:A → B invertibile, essa e la sua inversa f^{-1}:B → A hanno lo stesso carattere di monotonia. Così, se è strettamente crescente (decrescente) l'una lo è anche l'altra.

c) Calcolo della derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Notiamo che $y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} - \sqrt{2^3} = \frac{3}{2} - 2\sqrt{2}$

$= -1{,}328427125$.

Il punto y_0=*f* (3/2) è interno all'intervallo $[-2; -0{,}9139286681...]$.

Premesso che la funzione inversa f^{-1} non è esprimibile elementarmente, poiché sono soddisfatte le ipotesi del **teorema sulla derivata della funzione inversa**(2) , esiste la derivata della funzione inversa nel punto y_0= *f* (3/2) ed è uguale a

$$D\left(\left[f^{-1}(y)\right]\right)_{y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

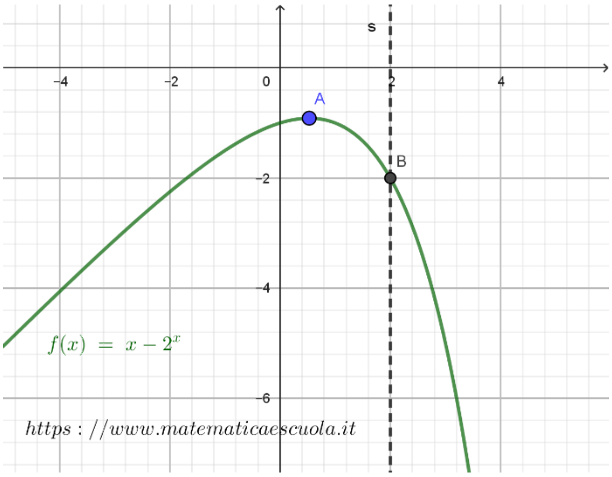

Figura 1-Dagramma della funzione con indicazione del punto A del diagramma nella cui ascissa la funzione assume il massimo assoluto. La restrizione della funzione per l'invertibilità è stata considerata sull'intervallo [x_A;x_B]

Ciò detto, calcoliamo la derivata richiesta avendo precisato sopra che $f'(x) = 1 - 2^x \cdot \ln(2)$.

$$D\left(\left[f^{-1}(y)\right]\right)_{y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{1 - 2^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(2)} = \frac{1}{1 - 2\sqrt{2} \cdot \ln(2)}$$

$= -1{,}04110676...$

d) Enunciato del **teorema della media integrale** per una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo chiuso [a;b] e continua.

Sia *f*: [a;b]→R una funzione reale di variabile reale continua. Esiste almeno un punto c∈[a;b] nel quale la funzione assume il valore numerico $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$,

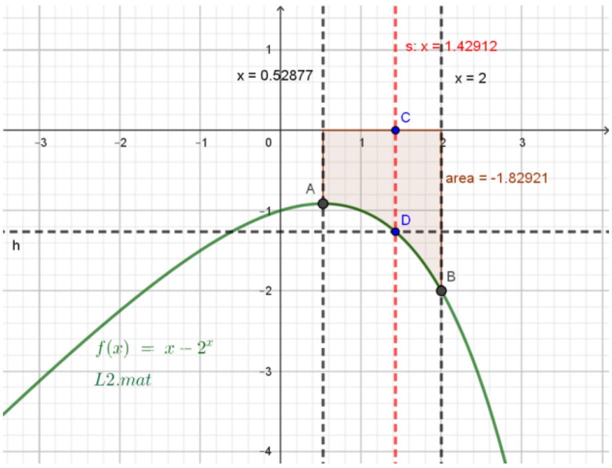

Figura 2- Illustrazione dell'applicazione del teorema della media integrale: nel punto c=1,42912 la funzione relativamente all'intervallo [0,52876;2] assume il suo valore medio. In figura si può anche leggere il valore dell'area, con il segno negativo, del trapezoide delimitato dall'arco di curva relativo all'intervallo [x_A;x_B] e dall'asse delle ascisse.

(2) Ricordiamo **l'enunciato del teorema sulla derivata della funzione inversa**. Data f:A→B, funzione reale e di variabile reale, che sia continua ed invertibile. Se f è derivabile in A e la derivata prima in un punto x_0∈A è diversa da zero, posto $y_0=f(x_0)$, allora la funzione inversa f^{-1}:B→A è derivabile in y_0 e risulta $D\left(\left[f^{-1}(y)\right]\right)_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

quindi risulta $f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$. Il valore f(c) indicato è detto **valore medio della funzione nell'intervallo [a;b]** di definizione.

Calcoliamo il valore medio f(c) della funzione relativamente all'intervallo [x_0;2].

$$f(c)=\frac{1}{2-x_0}\cdot\int_{x_0}^{2}\left(x-2^x\right)dx=\frac{1}{2-x_0}\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2^x}{\ln(2)}\right]_{x_0}^{2}=\frac{1}{2-x_0}\cdot\left[\left(\frac{4}{2}-\frac{4}{\ln(2)}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot x_0^{\,2}-\frac{2^{x_0}}{\ln(2)}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2-0{,}528766}\cdot\left[\left(2-\frac{4}{\ln(2)}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}528766^2-\frac{2^{0{,}528766}}{\ln(2)}\right)\right]=0{,}6797015\cdot\left[(2-5{,}7707801)-(0{,}1397967-2{,}0813684)\right]=$$

$$0{,}6797015\cdot(-1{,}8592084)=-1{,}2637067$$

Il valore medio cercato della funzione relativamente all'intervallo [x_0;2]= [0,528766;2] è f(c)=-1,2637067.

Un aiuto dalla grafica

Per quanto concerne il punto **c** in cui la funzione *f* assume il valore medio relativo all'intervallo [x_0;2], in **Figura 2** è tracciata la retta ***h*** avente equazione y=f(c) che incontra il diagramma della curva nel punto D. Ebbene, il punto **c** in cui *f* assume il suo valore medio è l'ascissa di D .

L'ascissa di D è stata ottenuta tramite l'applicazione grafica GeoGebra tracciando per D la retta s parallela all'asse delle ordinate e determinando l'intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse. Il punto è c≈1,42912.

Approfondimento operativo

Se si intende determinare direttamente il **valore approssimato** del punto x =c si deve risolvere l'equazione nell'incognita x

f(x)= -1,2637067, cioè x -2 ^{x} =-1,2637067.

A tal fine si deve attivare un **processo algoritmico iterativo di ricerca** che permetta di conseguire l'obiettivo, determinando via via valori approssimati sempre migliori del punto **c** finché non si individua un valore che soddisfi il **grado di precisione** con cui si intende determinare il valore incognito.

Esistono diversi metodi teorici che si possono mettere in atto per la ricerca, come il **metodo delle tangenti e/o delle secanti di Newton-Fourier** o il più comodo **metodo di bisezione di facile implementazione**.

La ricerca della soluzione con il **metodo di bisezione** consiste nell'individuare una famiglia di intervalli **I_1, I_2, I_3,…,I_n,… ,** a partire da un **intervallo iniziale I_0** che contenga il punto **c** da determinare, e procedere con la costruzione dei successivi intervalli della famiglia secondo la regola che ciascuno dei successivi intervalli sia contenuto strettamente nel precedente ed abbia ampiezza metà di questo: in simboli $I_n \supset I_{n+1}$ e $\mu(I_{n+1})=\mu(I_n)/2$. La ricerca deve continuare finché non si determina l'intervallo I_k la cui *semiampiezza* non è inferiore alla metà dell'errore prefissato (scostamento dal valore vero). A quel punto si arresta la ricerca assumendo come valore del punto **c** il punto medio dell'ultimo intervallo trovato I_k.

In ogni caso il compito da svolgere è abbastanza impegnativo.