Liceo Scientifico "I. Newton" – Roma

Prof. Paolo Magagnoli

QUESITO 1

Sia ABC un triangolo equilatero di lato l e sia P un punto sul lato BC. Siano, poi, J e K le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sui lati AC e AB. Si determini P affinché sia massima la probabilità che, preso a caso un punto nel triangolo ABC, esso appartenga al quadrilatero $AKPJ$.

$$\left[\overline{\boldsymbol{PB}} = \frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{2}}\right]$$

QUESITO 2

Nel piano cartesiano si consideri un'ellisse di centro l'origine con i fuochi sull'asse y, semiasse maggiore 4 e semiasse minore 3. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando tale ellisse attorno all'asse delle ordinate.

$$[\boldsymbol{V} = \mathbf{48}\boldsymbol{\pi}]$$

QUESITO 3

È assegnata l'equazione differenziale:

$$y' = -e^{-y}$$

Senza calcolarne le soluzioni, si dimostri che esse sono monotone decrescenti e concave. Si risolva, poi, il problema di Cauchy associato all'equazione con condizione con condizione iniziale $y(0) = 0$.

$$[\textbf{decrescenti perché } \boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}} < \mathbf{0}]$$

$$[\textbf{concave perché}: \boldsymbol{y}'' = -\boldsymbol{e}^{-\mathbf{2}\boldsymbol{y}} < \mathbf{0}]$$

$$[\textbf{soluzione problema di Cauchy}: \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \ln(\mathbf{1} - \boldsymbol{x})]$$

QUESITO 4

Si calcoli il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

$$[\mathbf{1}]$$

QUESITO 5

È assegnata la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax & x < 0 \\ e^{-x} + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri a e b affinché $f(x)$ soddisfi il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2; 2]$ e si individui il punto x_0 in cui si verifica la tesi. Fissati i parametri, si consideri, poi, la funzione $|f(x)|$ e se ne studino i punti di non derivabilità indicando per ciascuno di essi l'equazione della retta tangente a destra e a sinistra.

$$\left[\boldsymbol{a = 1, b = -1; x_0 = -\frac{e^{-2} + 5}{8}}\right]$$

$$[\boldsymbol{x = -1} \textbf{ punto angoloso}, \boldsymbol{y = -x - 1} \textbf{ tangente sinistra}, \boldsymbol{y = x + 1} \textbf{ tangente destra}]$$

$$[\boldsymbol{x = 0} \textbf{ punto angoloso}, \boldsymbol{y = -x} \textbf{ tangente sinistra}, \boldsymbol{y = x} \textbf{ tangente destra}]$$