Adriana Lanza

Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come calcolarne un possibile valore e darne una definizione? Ha qualcosa in comune con il numero π?

Risposta

Il numero di Nepero "e" è la base privilegiata per i logaritmi (neperiani o naturali) e per la funzione esponenziale.

Formalmente può essere presentato come il limite di una successione strettamente crescente e limitata : $\boldsymbol{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$, risultato che si estende alla corrispondente funzione di variabile reale: $\boldsymbol{e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$.

Si tratta di un limite <<fondamentale>> in quanto a partire da esso si possono calcolare i limiti notevoli delle funzioni esponenziali o logaritmiche e sembra emergere in modo <<*naturale*>> in diversi ambiti della matematica e delle sue applicazioni.

Un esempio classico è il calcolo del montante in una capitalizzazione composta

Supponiamo di aver depositato in banca un capitale C al tasso annuo (che *per semplicità consideriamo 100%). Il montante dopo un anno sarà* $M = C(1+1)$ *. Se l'interesse è conteggiato in modo continuo , in frazioni di anni, è lecito dividere* $\Delta t = 1\ anno$ *in n parti uguali e, in corrispondenza, anche il tasso di interesse . Dopo t anni sarà*

$$M(t) = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nt} = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nt}.$$

Al tendere di n a infinito la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ *tende al valore finito <<e>>, pertanto sarà* $M(t) = Ce^{t}$

Il limite $<< e >>$ giustifica l'approssimazione di una distribuzione binomiale con la distribuzione di Poisson

Fra le distribuzioni discrete, quella che meglio si adatta a varie classi di fenomeni è la distribuzione Binomiale, ovvero la distribuzione di probabilità della seguente variabile aleatoria: Sia S l'evento associato ad uno dei due esiti e $\overline{S}$ *l'evento contrario. Se* p *e* $q = 1-p$ *sono le rispettive probabilità, la probabilità totale che S si verifichi* k *volte (*k *successi) in n prove è* $P_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{k}$.. *Il suo valor medio è* $\mu = np$.
La distribuzione di Poisson, la distribuzione degli <<eventi rari>>, si applica quando $p \to 0$ *e* $n \to \infty$ *mentre il loro prodotto è costante ed eguale a* μ *:* $P_k = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

Il numero $\boldsymbol{e}$, al pari di $\boldsymbol{\pi}$, è irrazionale (numero con infinite cifre decimali non periodico) e trascendente (non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali).

Il matematico Jacob Bernoulli , interessato a risolvere in Matematica finanziaria i problemi di interesse composto, nel 1683 fu tra i primi a trovare un'approssimazione, applicando il Teorema del Binomio

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Per determinare un valore approssimato di e con la precisione voluta, si può sfruttare la relazione

$$\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{n+1}$$

La prima successione è crescente e la seconda decrescente, ma entrambe tendono al limite e, anche se piuttosto lentamente.

E' possibile però utilizzare un' altra successione di numeri razionali che converge ad "e" in modo molto più veloce .

Il numero di Nepero è infatti somma di una serie convergente $\left(e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right)$, grazie alla quale Eulero ne determinò un'approssimazione fino alla diciottesima cifra decimale: $e \cong 2{,}718281828459045235.$

Allo stesso Eulero si deve la scelta del nome $<< e >>$, forse in quanto corrispondente all'iniziale del suo cognome, molto più probabilmente in riferimento alla funzione esponenziale o semplicemente perchè era la prima lettera dell'alfabeto non ancora utilizzata tra i nomi degli oggetti matematici.

La sua scoperta è però attribuita a Nepero , l'inventore dei logaritmi.

John Napier, Nepero , alla fine del '500 , grazie alle relazioni tra i termini di una progressione geometrica e i relativi esponenti, trovò un metodo per facilitare le operazioni di calcolo in trigonometria sferica e astronomia, trasformando i prodotti in somme, le divisioni in sottrazioni e l'estrazione di radice in divisione

Con l'invenzione dei logaritmi e la compilazione delle prime tabulazioni Nepero

"… avendone ridotto il lavoro, aveva raddoppiato la vita degli astronomi" (Laplace).

Il vecchio regolo calcolatore , che sfruttava le stesse proprietà, è stato utilizzato per circa tre secoli fino all'avvento delle calcolatrici elettroniche.

Nepero intuì che è possibile scrivere un numero qualsiasi N nella forma

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

in modo da utilizzare come base delle potenze successive un numero molto prossimo a 1, così da distanziare di poco una potenza dall'altra (poiché le tavole trigonometriche riportavano i valori dei seni fino a 7 cifre decimali, scelse per base il numero 0,9999999, cioè $1-10^{-7}$) e chiamò il numero L

La scrittura $\frac{N}{10^7} = \left[(1 - 10^{-7})^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}$ rimanda a alla moderna definizione di logaritmo

$$\frac{L}{10^7} \cong log_{\frac{1}{e}} \frac{N}{10^7}$$

Nepero si era avvicinato, pertanto, alla scoperta del numero che, un secolo più tardi, sarebbe stato riconosciuto come base universale dei logaritmi .

La suddetta scelta rende più semplici le operazioni di derivazione (e di integrazione) delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Si dimostra, infatti, che

$$D[a^x] = a^x \ln a \rightarrow D\,[e^x]\ln e = e^x$$

$$D[log_a x] = \frac{1}{x \ln a} \rightarrow D[\ln x] = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$

Per quanto riguarda la derivata di $log_a x$ *osserviamo che viene sostanzialmente utilizzato il limite notevole* $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$*, il quale a sua volta deriva da quello fondamentale, con un semplice cambiamento di variabile*

$$\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x+h) - log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\ \frac{1}{x} log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

Sia il numero di Nepero , sia il numero di Archimede hanno un ruolo di rilievo nella formulazione di importanti leggi delle scienze naturali o sociali .
Mentre π compare prevalentemente nella descrizione di fenomeni oscillatori oppure rientra come fattore di normalizzazione ove è presente una simmetria sferica, il numero e fa da protagonista nei fenomeni di crescita o decadimento esponenziale (modello esponenziale $y = y_0 e^{\lambda x}$).

Dal punto di vista matematico la crescita esponenziale è associata a un rapporto incrementale proporzionale al valore della funzione

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=k\cdot f(x)$$

Il numero k è il tasso di variazione relativo (medio) e dipende dalla scelta dell'intervallo Δx.
Al tendere a 0 di Δx *la relazione si scrive in forma differenziale* $f'(x) = \lambda f(x)$ *, dove* λ *è il tasso di variazione istantaneo che caratterizza il fenomeno esponenziale.*

La soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \lambda \cdot y(x)$ *con la condizione* $y(0) = \boldsymbol{y_0}$

fornisce il risultato $\boldsymbol{y(x) = y_0 e^{\lambda x}}$

A seconda che la costante λ sia positiva o negativa, si parla di crescita o di decadimento (diminuzione)

Solitamente legge che descrive generico modello di crescita o decadimento esponenziale in funzione del tempo assume la forma $y = y_0 e^{\pm\frac{t}{\tau}}$*, dove* τ *è la costante di tempo che caratterizza il fenomeno . Geometricamente è il valore della sottotangente. Esempi classici: crescita di una popolazione di batteri, decadimento radioattivo, processo di scarica in un circuito RC.*

Entrambe le costanti, e e π, compaiono nella formula della gaussiana, la funzione di distribuzione normale, della quale non è possibile scrivere una primitiva in termini di funzioni elementari ($\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}$ in forma standardizzata)

Il legame tra e e π è evidente nell'integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dx = 1}$$

Questo risultato giustifica l'espressione della funzione di distribuzione e sta alla base della costruzione delle tavole della funzione di ripartizione $F(x) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

Affrontando i numeri complessi, troviamo poi un legame più profondo, tra le due costanti, nella celebre identità di Eulero $\boldsymbol{e^{i\pi}+1=0}$, in una visione unitaria degli strumenti matematici che stanno alla base dell'indagine del mondo reale nei suoi vari aspetti: geometrici, analitici, statistici.