Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di $\mu, \sigma,\ \sigma^2$ e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

Risposta

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

È la funzione che rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua la cui variabilità è prodotta da innumerevoli piccole cause accidentali (distribuzione normale) . Concettualmente è legata ad uno dei teoremi statistici con maggiori implicazioni pratiche, il Teorema del limite centrale :

La somma n di variabili indipendenti aventi identica distribuzione è una variabile che si distribuisce normalmente qualsiasi sia la tipologia di distribuzione di partenza .

Fra le distribuzioni discrete, quella che meglio si adatta a varie classi di fenomeni è la distribuzione binomiale di Bernoulli, ovvero la distribuzione di probabilità della seguente variabile aleatoria:

Sia S l'evento associato ad uno dei due esiti e $\overline{S}$ l'evento contrario.

Se p e $q = 1 - p$ sono le rispettive probabilità, la probabilità totale che S si verifichi k volte (k successi) in n prove indipendenti è $P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{k}$.. Il suo valor medio è $\mu = np$

Con un numero n di prove sufficientemente grande e probabilità di successo p piccola (evento raro) la distribuzione binomiale può essere approssimata da quella di Poisson avente media $\mu = np$.
La distribuzione normale o gaussiana, invece, è la distribuzione di probabilità dei risultati che si otterrebbero se il numero delle prove diventasse infinitamente grande e i risultati dipendessero da molti fattori casuali e indipendenti

La grande numerosità permette altresì di ottenere un valore medio abbastanza grande , vicino al quale si concentrano i valori di maggiore frequenza.
Ad esempio, la distribuzione dell'altezza in una popolazione è rappresentata abbastanza bene da una funzione di densità di probabilità gaussiana in quanto dipende da diversi fattori come l'ereditarietà, l'alimentazione, lo stile di vita ecc.

Per il teorema del limite centrale la distribuzione binomiale e quella di Poisson tendono alla distribuzione normale al crescere dei rispettivi valori medi

In pratica, per valori molto elevati di np, si può sostituire una distribuzione a carattere discreto, come la binomiale o la poissoniana, con una distribuzione continua da studiare con i metodi dell'Analisi.

Proprietà della funzione

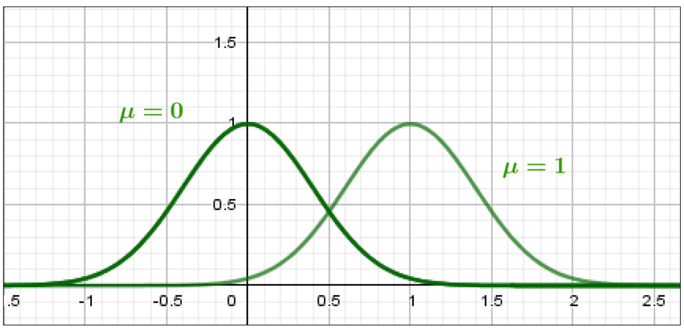
I due parametri positivi μ e σ definiscono le proprietà della distribuzione e determinano la forma e la posizione della curva.

Il valore μ è la Media della distribuzione e coincide con la Moda e la Mediana, σ^2 è la varianza, σ è la deviazione standard

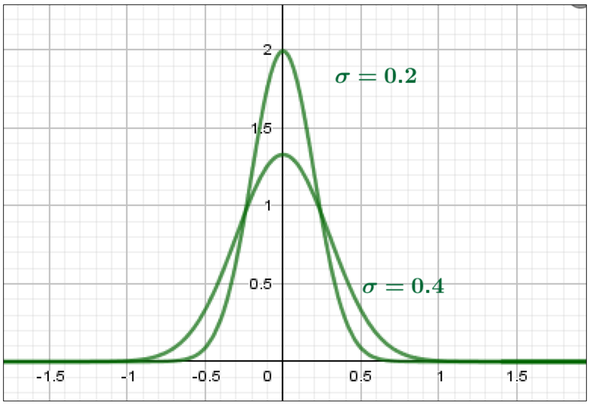
Le caratteristiche fondamentali della $f(x)$ sono:

- la forma a campana del grafico
- la simmetria rispetto al valor medio μ
- il massimo per $x = \mu$ (l'ordinata vale $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$)
- quanto più x si allontana da μ tanto più f(x) decresce tendendo asintoticamente a zero
- i punti μ+σ e μ-σ sono punti di flesso.

Al crescere di μ la curva trasla verso destra lungo l'asse x



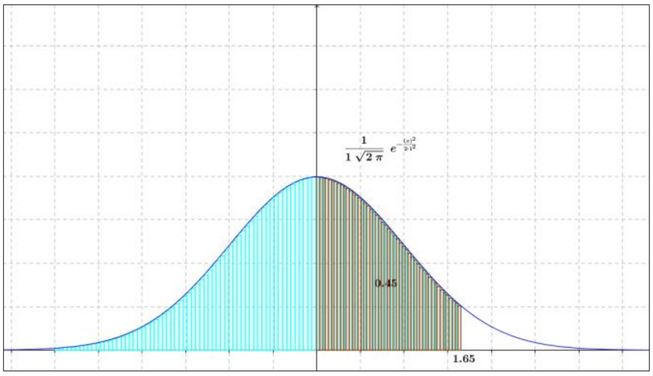
Al crescere di σ i valori della distribuzione sono meno concentrati intorno al valor medio, la curva è più larga e più bassa.



Se X è un valore della variabile aleatoria, la probabilità che X appartenga all'intervallo $[a; b]$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

Geometricamente è l'area sottesa dalla curva sull'intervallo$[a; b]$ In particolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

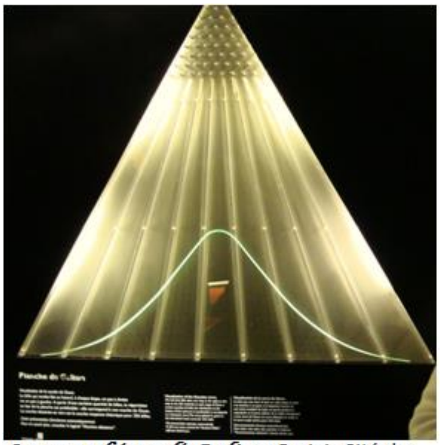


La caratteristica forma a campana indica che i valori osservati si concentrano intorno al valore centrale e diventano sempre più rari man mano che si discostano da questo, sia per difetto che per eccesso.

Nell'area compresa tra $-\sigma$ ***e*** $+\sigma$ ***cade circa il 68% della distribuzione, tra*** -2σ ***e*** $+2\sigma$ ***cade circa il 95%,*** tra -3σ ***e*** $+3\sigma$ ***circa il 99,77% (regola dei 3 sigma)***

Questa distribuzione è stata individuata nel 1733 da De Moivre per dare una valutazione approssimata della funzione di probabilità binomiale in un elevato numero di prove; ha, successivamente, acquisito importanza quando nel 1809 Gauss ne fece uso nel contesto della teoria degli errori e nel 1835 Adolphe Quetelet l'applicò alla sociologia e all'antropologia.

Interessante il contributo di Francis Galton che costruì la nota macchina che porta il suo nome (si tratta di un dispositivo che permette di generare sperimentalmente una gaussiana.)



La macchina di Galton-Parigi- Cité des Sciences et de l'Industrie

Lo stesso Galton esprime con queste parole il suo entusiasmo nei confronti della curva di Gauss

<<Non conosco nulla capace di infiammare la fantasia quanto la forma ammirevole dell'ordine cosmico espressa dalla "legge della frequenza degli errori". Se i Greci l'avessero conosciuta, l'avrebbero personificata e adorata come una divinità. Diffonde la quiete armoniosa nel disordine più selvaggio; quanto più regna l'anarchia, tanto più sovrano è il suo dominio. Appare, forma insperata e meravigliosa della regolarità, dietro il velo del caos>>