M. I. – Ministero dell'Istruzione
UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER IL LAZIO
ISTITUTO D'ISTRUZIONE SUPERIORE
"Vincenzo Cardarelli"
Strada Prov.le Porto Clementino, snc 01016 – TARQUINIA (VT)
☎ 0766/855330
✉vtis001002@istruzione.it PEC: vtis001002@pec.istruzione.itC.F.90002000561
Sito internet: http://www.iscardarelli.edu.it

3 Maggio 2023

Tema di: Matematica

il candidato risolva uno dei problemi e risponda a quattro dei quesiti proposti

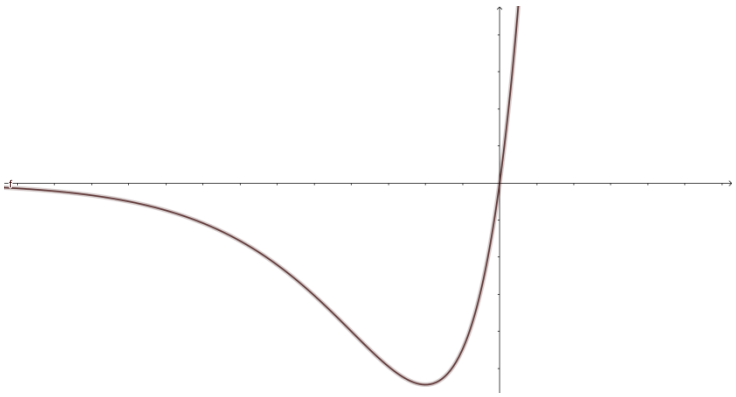
PROBLEMA 1

Sia data la funzione $f(x) = \left|\frac{x^6}{4} - x^4\right|$

a. Se ne tracci il grafico analizzandone continuità, derivabilità, punti di massimo e di minimo ed eventuali simmetrie
b. Della funzione $f(x)$ si studi la presenza e la natura di eventuali flessi
c. Sia $P \in f(x)$ in $[0,2]$, si trovino le coordinate di P che massimizzano l'area del triangolo di vertici $O(0;0), A(2;0), P(x_p; y_p)$
d. Sia $g(x)$ uguale a $f(x)$, ma privata del valore assoluto, si determini il punto C intersezione delle rette tangenti al grafico di $g(x)$ nei punti di ascissa $x = \pm 1$. Stabilire, in modo analitico, quanti punti del grafico di $g(x)$ hanno tangente perpendicolare alla tangente in $x = 1$

PROBLEMA 2

Dato il grafico in figura, si stabilisca, con opportune motivazioni, quale delle funzioni assegnate lo descrivono



i. $f(x) = kxe^{k+x}$
ii. $f(x) = ke^{k+x}$
iii. $f(x) = kx^3 + kx^2$
iv. $f(x) = -kxe^{k+x}$
v. $f(x) = kx^3e^{kx}$

a. Individua la famiglia di funzioni e quindi determina il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tale che il punto di minimo abbia ordinata $y = -2e$
b. Commenta il grafico della funzione individuata $f(x) = 2xe^{2+x}$ mostrandone le proprietà ed alcuni valori di riferimento
c. Si ricavino i grafici e le espressioni analitiche della funzione $g(x)$ simmetrica ad $f(x)$ rispetto all'asse delle X e della funzione $h(x)$ simmetrica di $f(x)$ rispetto all'origine. Dopo aver scritto analiticamente una funzione definita a tratti $t(x)$ composta da $g(x)$ se $x < 0$ e $h(x)$ se $x \geq 0$, studiarne la derivabilità nell'origine
d. Presa la retta r: $x = 2$, detti M l'intersezione tra tale retta ed $h(x)$, Q(2;0) e dato il punto $P \in h(x)$ con ascissa positiva, si determinino le sue coordinate in modo che l'area del triangolo PQM sia massima

QUESITI

1. Verifica che le funzioni $f(x) = 3 \cdot lnx$ e $g(x) = ln(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione puoi dare a questo risultato?

2. Determinare i valori di a e b tali che la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 3x + \frac{b}{x+1} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ Verificare le ipotesi del teorema di Lagrange in [-1;1] e determinare il punto c che verifica la sua tesi

3. Tracciare il grafico di $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ dando adeguate giustificazioni analitiche a tutte le sue caratteristiche e proprietà.

4. E' data la funzione $f(x) = \frac{a}{x} + b \cdot lnx + cx$ dove a, b, c sono parametri reali; determinare i loro valori in modo che f(x) abbia un punto stazionario in $A(1; 1)$ e un flesso in $x = 2$

5. Determinare a e b in modo che la curva grafico della funzione $f(x) = \frac{ax^2+b}{bx+c}$ abbia la retta $y = x + 1$ come asintoto obliquo. Determinare l'equazione della tangente al grafico nel punto d'intersezione con l'asse Y

6. Tra i triangoli inscritti in un semicirconferenza quello isoscele ha (dai esauriente giustificazione della tua scelta):
   a. Area massima e perimetro massimo
   b. Area massima e perimetro minimo
   c. Area minima e perimetro minimo
   d. Area minima e perimetro massimo

7. Si calcoli il limite della funzione $f(x) = \frac{e^{x^3}-1}{x\,sin^2 x}$ quando x tende a 0.

8. Sia data la funzione $f(x) = \frac{x^2-ax}{|x-b|}$ determinare il valore dei parametri a e b reali in modo che abbia asintoti : $x = 2,\ \ y = x - 2\ \ per\ x \to +\infty$ e , $y = -x + 2\ \ per\ x \to -\infty$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del testo del tema d'esame.