

Quesito 1

Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato BCDE costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A. Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Risposta

Per dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC, possiamo utilizzare il teorema di Pitagora e il teorema di Euclide.

Sappiamo che il quadrato BCDE è costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, quindi DE è congruente a BC. Inoltre, poiché il quadrato è costruito sul lato opposto all'ipotenusa, DE è congruente a AB e BC è congruente a AC.

Quindi abbiamo che $AB = DE$ e $AC = BC$. Inoltre, poiché O è il centro del quadrato BCDE, abbiamo che $BO = CO$ e $DO = EO$.

Consideriamo ora il triangolo OAB. Per il teorema di Pitagora, abbiamo:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$

Consideriamo ora il triangolo OAC. Per il teorema di Pitagora, abbiamo:

$$OA^2 + AC^2 = OC^2$$

Sostituendo AB con DE e AC con BC, otteniamo:

$$OA^2 + DE^2 = OB^2$$

$$OA^2 + BC^2 = OC^2$$

Poiché $DE = AB$ e $BC = AC$, possiamo scrivere:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$

$$OA^2 + AC^2 = OC^2$$

Che sono le stesse equazioni che abbiamo ottenuto per i triangoli OAB e OAC.

Quindi abbiamo dimostrato che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Quesito 2

Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente: - un numero primo - un numero almeno pari a 3 - un numero al più pari a 3.

Risposta

Il dado truccato ha ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Quindi, la probabilità di ottenere una faccia pari è $2/3$ e la probabilità di ottenere una faccia dispari è $1/3$.

Per calcolare le probabilità richieste, dobbiamo considerare i numeri primi e i numeri pari e dispari.

- Numero primo: Ci sono solo due numeri primi sul dado truccato, ovvero 2 e 3. La probabilità di ottenere un numero primo è quindi la somma delle probabilità di ottenere un 2 o un 3. Poiché la probabilità di ottenere un 2 o un 3 è uguale alla probabilità di ottenere una faccia dispari ($1/3$), la probabilità di ottenere un numero primo è $2/3 * 1/3 = 2/9$.
- Numero almeno pari a 3: Ci sono quattro numeri sul dado che sono pari e maggiori o uguali a 3, ovvero 4, 6, 2 e 6. La probabilità di ottenere un numero almeno pari a 3 è quindi la somma delle probabilità di ottenere un 4, un 6 o due volte il numero 2. Poiché la probabilità di ottenere un numero pari è uguale alla probabilità di ottenere una faccia pari ($2/3$), la probabilità di ottenere un numero almeno pari a 3 è $(2/3 * 2/3) + (2/3 * 2/3) + (1/3 * 1/3) = 8/9$.
- Numero al più pari a 3: Ci sono tre numeri sul dado che sono pari e minori o uguali a 3, ovvero il numero 2 e due volte il numero 1. La probabilità di ottenere un numero al più pari a 3 è quindi la somma delle probabilità di ottenere il numero 2 o due volte il numero 1. Poiché la probabilità di ottenere un numero pari è uguale alla probabilità di ottenere una faccia pari ($2/3$), la probabilità di ottenere un numero al più pari a 3 è $(1/3 * 2/3) + (1/3 * 1/3) + (1/3 * 1/3) = 4/9$.

Quesito 3

Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r .

Risposta

L'equazione cartesiana della superficie sferica di centro e tangente a una retta può essere costruita a partire dalla definizione della sfera. Se il centro della sfera coincide con l'origine degli assi cartesiani, l'equazione della sfera diventa $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Altrimenti, l'equazione cartesiana della superficie sferica può essere ottenuta elevando al quadrato e sommando i monomi simili.

Per determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente alla retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, possiamo seguire questi passaggi:

1. Calcolare il vettore direttore della retta r come la differenza tra i due punti: $v = B - A = (2-1)i + (3+2)j + (-1-0)k = i + 5j - k$.
2. Calcolare il punto di intersezione tra la retta r e il piano passante per il centro C :
 - Trovare un punto del piano passante per il centro C : ad esempio, il punto medio del segmento che congiunge i punti A e B : $M((1+2)/2, (-2+3)/2, 0-1/2) = (3/2, 1/2, -1/2)$.
 - Trovare l'equazione del piano passante per il centro C e il punto medio M :
 - Calcolare il vettore che va dal centro C al punto medio M : $v = M - C = (3/2-1)i + (1/2+6)j + (-1/2-7)k = 1/2i + 13/2j - 15/2k$.
 - L'equazione del piano passante per il centro C e il punto medio M è data da:
 - $1/2(x-1) + 13/2(y+6) - 15/2(z-7) = 0$
 - Semplificando si ottiene l'equazione cartesiana del piano: $x + 13y - 15z = -85$.
 - Trovare il punto di intersezione tra la retta r e il piano passante per il centro C :
 - Sostituire le coordinate del punto di intersezione nella retta: $x=1+t$; $y=-2+5t$; $z=-t$.
 - Sostituire le coordinate del punto di intersezione nel piano: $(1+t) + 13(-2+5t) - 15(-t-7) = -85$.
 - Risolvere l'equazione rispetto a t : $t=4$.
 - Quindi il punto di intersezione tra la retta e il piano è $P(5,-5,-4)$.
3. Calcolare la distanza tra il centro della sfera e il punto P :
 - Distanza tra due punti nello spazio tridimensionale: $d(P,C) = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 + (z_P - z_C)^2}$.
 - Quindi $d(P,C) = \sqrt{(5-1)^2 + (-5+6)^2 + (-4-7)^2} = \sqrt{147}$.
4. L'equazione cartesiana della superficie sferica di centro C e tangente alla retta r è data da:
 - $(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 + (z-z_C)^2 = r^2$
 - Sostituendo i valori ottenuti si ha:
 - $(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 147$

Quesito 4

Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Risposta

Dato un parallelepipedo a base quadrata di volume V , la sua area totale è data da:

$$A = 4a^2 + 2ha$$

dove a è la lunghezza del lato della base e h è l'altezza del parallelepipedo.

Per trovare il parallelepipedo di area totale minima, dobbiamo trovare il valore di a e h che minimizza l'area totale. Poiché il volume del parallelepipedo è fisso, possiamo esprimere h in termini di a :

$$h = V/a^2$$

Sostituendo h nell'equazione dell'area totale, otteniamo:

$$A = 4a^2 + 2(V/a)$$

Per trovare il valore di a che minimizza l'area totale, dobbiamo derivare l'equazione dell'area rispetto a a e uguagliarla a zero:

$$d(A)/d(a) = 8a - 2(V/a^2) = 0$$

$$8a = 2(V/a^2)$$

$$4a^3 = V$$

$$a = (V/4)^{1/3}$$

Quindi, il parallelepipedo di area totale minima ha lato della base:

$$a = (V/4)^{1/3}$$

Per determinare se questo parallelepipedo ha anche diagonale di lunghezza minima, dobbiamo confrontare la diagonale di questo parallelepipedo con quella degli altri parallelepipedi con lo stesso volume.

La diagonale di un parallelepipedo a base quadrata con lato della base a e altezza h è data da:

$$\sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Sostituendo h con V/a^2 , otteniamo:

$$\sqrt{a^2 + 4(V/a^2)^2}$$

Semplificando questa espressione, otteniamo:

$$\sqrt{5/3} * V^{1/3}$$

Quindi, il parallelepipedo di area totale minima ha diagonale di lunghezza:

$$d = \sqrt{5/3} * V^{1/3}$$

Non possiamo dire se questa diagonale è la minima possibile senza confrontarla con quella degli altri parallelepipedi con lo stesso volume.

Quesito 5

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Risposta

Per determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, possiamo utilizzare due metodi diversi.

Metodo 1: Derivata

Il primo metodo consiste nel calcolare la derivata della funzione $y = \sqrt{25 - x^2}$ e valutarla nel punto di ascissa 3. La derivata della funzione è:

$$y' = -x/\sqrt{25 - x^2}$$

Valutando la derivata nel punto di ascissa 3, otteniamo:

$$y'(3) = -3/4$$

La pendenza della retta tangente è quindi $-3/4$. Per trovare l'intercetta, possiamo utilizzare la formula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dove (x_1, y_1) è il punto di tangenza. Nel nostro caso, il punto di tangenza ha ascissa 3 e ordinata:

$$y(3) = \sqrt{16} = 4$$

Sostituendo i valori nella formula, otteniamo:

$$y - 4 = -3/4(x - 3)$$

L'equazione della retta tangente è quindi:

$$y = -3/4x + 19/4$$

Metodo 2: Formula generale

Il secondo metodo consiste nell'utilizzare la formula generale per l'equazione della retta tangente a una curva in un punto. La formula generale è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Dove $f(x)$ è l'equazione della curva e $f'(x)$ è la sua derivata. Nel nostro caso, abbiamo:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Quindi:

$$f'(x) = -x/\sqrt{25 - x^2}$$

Valutando la derivata nel punto di ascissa 3, otteniamo:

$$f'(3) = -3/4$$

Il punto di tangenza ha ascissa 3 e ordinata:

$$f(3) = \sqrt{16} = 4$$

Sostituendo i valori nella formula generale, otteniamo:

$$y - 4 = -3/4(x - 3)$$

L'equazione della retta tangente è quindi:

$$y = -3/4x + 19/4$$

Quesito 6

Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$.

Risposta

Per determinare i valori dei parametri reali a e b affinché: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$, possiamo procedere come segue:

1. Scomponiamo il numeratore dell'espressione iniziale in $\sin(x) - ax^3 - bx$.
2. Moltiplichiamo e dividiamo per x^3 l'espressione ottenuta al punto 1.
3. Otteniamo così la seguente espressione: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax^3 - bx}{x^3}$.
4. Appliciamo la regola di L'Hôpital per risolvere il limite ottenuto al punto 3. Deriviamo il numeratore e il denominatore rispettivamente rispetto a x e otteniamo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 3ax^2 - b}{3x^2}$.
5. Sostituiamo x con 0 nell'espressione ottenuta al punto 4 e uguagliamo il risultato a 1, poiché il limite deve essere uguale a 1. Otteniamo così l'equazione: $-b = 1$.
6. Sostituiamo b con -1 nell'espressione ottenuta al punto 4 e uguagliamo il risultato a 0, poiché il limite deve essere uguale a 0. Otteniamo così l'equazione: $-3a = 0$.
7. Risolviamo le due equazioni ottenute ai punti 5 e 6 per trovare i valori dei parametri reali a e b che soddisfano la condizione data. Otteniamo così che $a = 0$ e $b = -1$.

Quindi i valori dei parametri reali a e b affinché: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$ sono $a = 0$ e $b = -1$.

Quesito 7

Si consideri la funzione: $f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$
Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Risposta

La funzione $f(x)$ è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Per determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione è derivabile, dobbiamo calcolare le derivate laterali destre e sinistre della funzione in $x = 0$.

Per $x < 0$, la funzione è l'arcotangente di x meno 1, che è una funzione continua e derivabile per ogni $x < 0$. Quindi la derivata sinistra di f in $x = 0$ è:

$$f'(0-) = \lim_{(x \rightarrow 0-)} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{(x \rightarrow 0-)} \frac{\arctan(x) - (-1)}{x - 0} = \lim_{(x \rightarrow 0-)} \frac{\arctan(x) + 1}{x} = -\infty + 1/0- = +\infty$$

Per $x \geq 0$, la funzione è una retta con coefficiente angolare a e intercetta b . Quindi la derivata destra di f in $x = 0$ è:

$$f'(0+) = \lim_{(x \rightarrow 0+)} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{(x \rightarrow 0+)} \frac{ax + b - b}{x - 0} = \lim_{(x \rightarrow 0+)} \frac{ax}{x} = a$$

La funzione è derivabile in $x = 0$ se e solo se le derivate laterali destre e sinistre coincidono. Quindi dobbiamo avere:

$$+\infty \text{ se } a < 0 \quad a \text{ se } a \geq 0$$

In altre parole, la funzione è derivabile in $x = 0$ se e solo se $a \geq 0$.

Per stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, dobbiamo verificare se esiste un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a) = f(b)$ e $f(x)$ sia continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) .

Poiché la funzione non è continua in $x = 0$, non può soddisfare le ipotesi del teorema di Rolle su nessun intervallo che contiene lo zero.

Quesito 8

Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Risposta

Per trovare gli zeri della funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a = 0$$

Possiamo usare il teorema di Rolle per determinare il numero di zeri reali distinti della funzione. Il teorema di Rolle afferma che se una funzione è continua su un intervallo chiuso e differenziabile su quell'intervallo aperto, allora esiste almeno un punto nell'intervallo aperto in cui la derivata della funzione è uguale a zero.

La derivata della funzione $f_a(x)$ è:

$$f'(x) = 5x^4 - 5a$$

Per trovare i punti in cui la derivata è uguale a zero, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$5x^4 - 5a = 0$$

$$5(x^4 - a) = 0$$

Quindi, i punti in cui la derivata è uguale a zero sono:

$$x = 0 \text{ oppure } x = \pm(a)^{1/4}$$

Ora dobbiamo determinare il numero di zeri reali distinti della funzione. Ci sono tre casi da considerare:

1. Se $a \leq 0$, allora la funzione non ha zeri reali distinti.
2. Se $a > 0$ e $a < 4/27$, allora la funzione ha un solo zero reale.
3. Se $a \geq 4/27$, allora la funzione ha tre zeri reali distinti.

Quindi, la funzione possiede tre zeri reali distinti per tutti i valori del parametro $a \geq 4/27$.