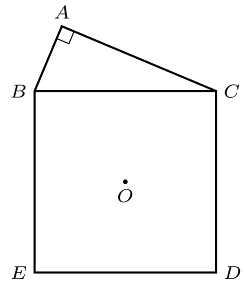
VIAGGIO AL CENTRO DEL QUADRATO (IN 10 PERCORSI)

Tra i quesiti proposti nel tema di matematica del 2023 c'era anche una dimostrazione geometrica.

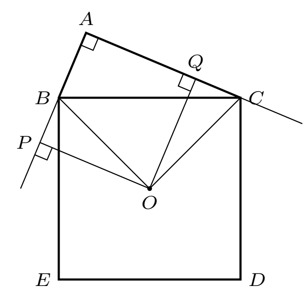
QUESITO 1 (2023). Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A. Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.



Il quesito appariva di difficoltà intermedia (piuttosto semplice ma tutt'altro che banale) e faceva riferimento ad una configurazione geometrica ricca di connessioni e di rimandi (non a caso, parente stretta di un fatto nodale quale è il teorema di Pitagora). Tant'è che il problema si presta con una certa naturalezza ad essere pensato ed affrontato in molteplici modi, caratteristica che potrebbe forse aver favorito le scelte dei maturandi (chissà). Ecco qualche esempio delle varie possibili strategie.

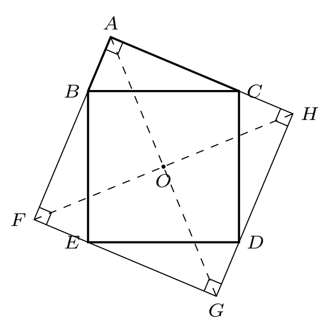
SOLUZIONE 1: triangoli congruenti

Supponendo di avere $\overline{AB} < \overline{AC}$ (se il triangolo ABC è isoscele, la tesi diviene banale) e tirando le perpendicolari OP e OQ alle rette AB e AC, si osserva che i triangoli rettangoli OPB e OQC sono congruenti. Essi hanno infatti ipotenuse uguali (metà diagonale del quadrato $BCDE$) ed un angolo acuto uguale ($\widehat{OBP} = 45° + \widehat{EBP} = 45° + \widehat{QCB} = \widehat{OCQ}$). Segue che le distanze di O dalle rette AB e AC, ossia $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$, sono uguali.

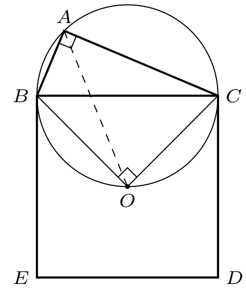


SOLUZIONE 2: completamento del quadrato

Possiamo riprodurre la classica costruzione per la dimostrazione del teorema di Pitagora: riportando, sui lati di $BCDE$, 4 triangoli rettangoli congruenti a ABC, in modo da alternare i lati, si ottiene un quadrato $AFGH$ (si verifica immediatamente che i punti A, B, F sono allineati, come anche F, E, G, e così via). Il centro del quadrato $AFGH$ è ancora il punto O: infatti, per la simmetria della costruzione, la diagonale AG passa per O, come anche FH (sistemare i dettagli...). Perciò le distanze di O dalle rette AB e AC sono entrambe la metà del lato del quadrato $AFGH$, ossia sono pari a $(\overline{AB} + \overline{AC})/2$.

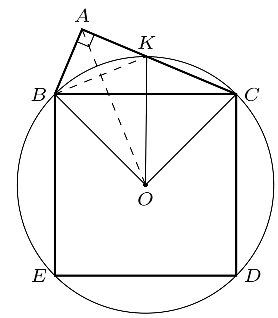


SOLUZIONE 3: circonferenza



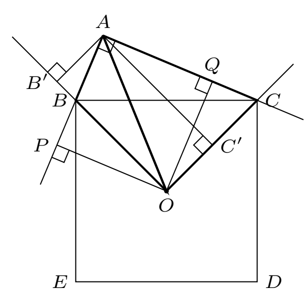
La circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa BC passa per A e per O, essendo $\widehat{BAC}$ e $\widehat{BOC}$ entrambi angoli retti. Dal momento che gli archi BO e OC sono tra loro congruenti (ciascuno è un quarto di circonferenza), anche gli angoli $\widehat{BAO}$ e $\widehat{OAC}$ sono tra loro congruenti, vale a dire AO è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$. Il punto O, dato che appartiene alla bisettrice, è quindi equidistante dai lati dell'angolo.

SOLUZIONE 4: altra circonferenza



Consideriamo la circonferenza ω che è circoscritta al quadrato $BCDE$. Supponendo di avere $\overline{AB} < \overline{AC}$, sia K il punto d'intersezione tra ω ed il lato AC. Essendo COK un triangolo isoscele, si ha $\widehat{OKC} = \widehat{OCK} = 45° + \widehat{ACB}$. Si trova quindi che $\widehat{OKA} = 180° - \widehat{OKC} = 180° - (45° + \widehat{ACB}) = 135° - \widehat{ACB}$. Si vede inoltre che $\widehat{OBA} = 45° + \widehat{ABC} = 135° - \widehat{ACB} = \widehat{OKA}$ poiché $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ sono angoli complementari. Gli angoli in B e in K del quadrilatero $ABOK$ sono dunque congruenti. Dato che $\overline{OB} = \overline{OK}$ (e dunque $\widehat{OBK} = \widehat{OKB}$), si ricava per differenza che $\widehat{ABK} = \widehat{AKB}$, ossia il triangolo ABK è isoscele con $\overline{AB} = \overline{AK}$. I triangoli ABO e AKO sono quindi congruenti per il 3° criterio di congruenza, da cui si conclude che AO è la bisettrice dell'angolo in A ed il punto O è pertanto equidistante da AB e AC.

SOLUZIONE 5: aree



Ci proponiamo di esprimere le aree dei triangoli ABO e ACO considerando come basi i lati congruenti OB e OC. Le rispettive altezze saranno le perpendicolari AB' e AC', uscenti da A, verso le rette OB e OC.
Supponendo di avere $\overline{AB} < \overline{AC}$, si può vedere che i triangoli rettangoli $AB'B$ e $AC'C$ sono simili. Infatti si ha che $\widehat{ACC'} = 45° + \widehat{ACB}$ ed inoltre risulta $\widehat{ABB'} = 180° - (45° + \widehat{ABC}) = 135° - \widehat{ABC} = 45° + \widehat{ACB}$, dato che $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ sono angoli complementari. Pertanto si ottiene:

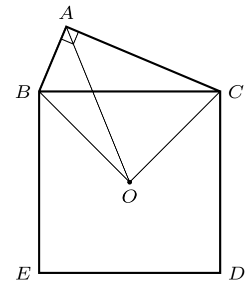
$$\frac{\mathsf{Area}(ABO)}{\mathsf{Area}(ACO)} = \frac{OB \cdot AB'/2}{OC \cdot AC'/2} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$ per la similitudine dei triangoli $AB'B$ e $AC'C$.

Tuttavia, prendendo come basi dei triangoli ABO e ACO i lati AB e AC, si avrà d'altro canto:

$$\frac{\mathsf{Area}(ABO)}{\mathsf{Area}(ACO)} = \frac{AB \cdot OP/2}{AC \cdot OQ/2} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{OP}{OQ}$$ dove OP e OQ sono le perpendicolari da O verso AB e AC.

Poiché, come si è visto sopra, questo rapporto è pari a $\dfrac{AB}{AC}$, ciò significa che $\dfrac{OP}{OQ} = 1$, ossia la tesi.

SOLUZIONE 6: trigonometria



Poniamo nel seguito: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $d = \overline{AO}$ e $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$. Si avrà $\overline{OB} = \overline{OC} = a/\sqrt{2}$.

Dal teorema del coseno nel triangolo ABO si ricava che:

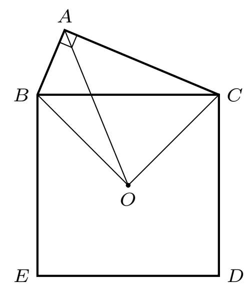
$$d^2 = c^2 + \tfrac{a^2}{2} - 2c \cdot \tfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos(45^\circ + \beta) = c^2 + \tfrac{a^2}{2} - \sqrt{2}\, c\, a \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta)$$
$$= c^2 + \tfrac{a^2}{2} - c\, a \cdot (\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}) = \tfrac{a^2}{2} + bc.$$

Di qui (sempre teorema del coseno):

$$\cos\widehat{BAO} = \frac{c^2 + d^2 - \frac{a^2}{2}}{2cd} = \frac{c^2 + \frac{a^2}{2} + bc - \frac{a^2}{2}}{2cd} = \frac{c+b}{2d}.$$

Trattandosi di un'espressione simmetrica rispetto ai cateti b e c, è chiaro che, ripetendo gli stessi calcoli per determinare $\cos\widehat{CAO}$, si ritroverà la medesima espressione, vale a dire $\cos\widehat{BAO} = \cos\widehat{CAO}$, da cui $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. Perciò AO è la bisettrice dell'angolo in A ed il punto O è equidistante da AB e AC.

SOLUZIONE 7: ancora trigonometria



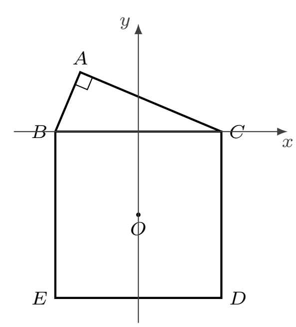
Poniamo, come sopra: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $d = \overline{AO}$ e $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$, da cui $\overline{OB} = \overline{OC} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Calcoliamo l'area del triangolo ABO.

$$\mathsf{Area}(ABO) = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot \tfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sen}\widehat{ABO} = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot \tfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sen}(45^\circ + \beta)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot \tfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta) = \tfrac{1}{4}\, c\, a\, (\tfrac{c}{a} + \tfrac{b}{a}) = \tfrac{1}{4}\, c\,(c+b).$$

La distanza $d(O, AB)$ corrisponde all'altezza relativa al lato AB nel triangolo ABO, ossia $d(O, AB) = 2\,\mathsf{Area}(ABO)\,/\,c = \frac{1}{2}(c+b)$.

Data la simmetria dell'espressione rispetto ai cateti b e c, ripetendo i calcoli per trovare $d(O, AC)$ si giungerà allo stesso valore.

SOLUZIONE 8: coordinate cartesiane



Introduciamo nel piano un riferimento cartesiano ortogonale, scegliendo come origine il punto medio dell'ipotenusa BC e come asse x la retta BC, in modo che B e C abbiano coordinate rispettivamente $B(-1, 0)$ e $C(1, 0)$. In questo modo il punto O avrà coordinate $O(0, -1)$. Indichiamo le coordinate del punto A con $A(h, k)$. Dal momento che l'angolo $\widehat{BAC}$ è retto, il punto A giace sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, perciò vale l'uguaglianza $h^2 + k^2 = 1$. È immediato verificare che le equazioni delle rette AB e AC sono, nell'ordine,

$(h+1)x + ky + (h+1) = 0$ e $(h-1)x + ky - (h-1) = 0$.

Calcoliamo quindi le distanze tra il punto O e le due rette. Si trova:

$$d(O, AB) = \tfrac{|-k+h+1|}{\sqrt{(h+1)^2+k^2}} = \tfrac{|k-h-1|}{\sqrt{2+2h}} \quad \text{e} \quad d(O, AC) = \tfrac{|-k-h+1|}{\sqrt{(h-1)^2+k^2}} = \tfrac{|k+h-1|}{\sqrt{2-2h}}, \quad \text{tenuto conto che } h^2 + k^2 = 1.$$

Si tratta dunque di verificare che $\frac{|k-h-1|}{\sqrt{2+2h}} = \frac{|k+h-1|}{\sqrt{2-2h}}$ ossia $(k-h-1)^2(2-2h) = (k+h-1)^2(2+2h)$.

Svolgendo i due quadrati (sempre tenendo conto che $h^2 + k^2 = 1$), si trova:

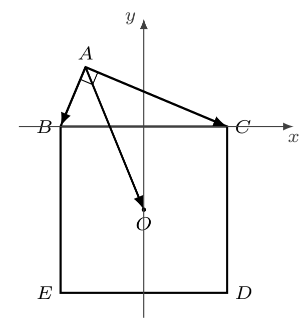
$$(k-h-1)^2 = k^2 + h^2 + 1 - 2hk - 2k + 2h = 2 - 2hk - 2k + 2h = 2(1 - hk - k + h) = 2(1+h)(1-k)$$
$$(k+h-1)^2 = k^2 + h^2 + 1 + 2hk - 2k - 2h = 2 + 2hk - 2k - 2h = 2(1 + hk - k - h) = 2(1-h)(1-k).$$

In conclusione, si ottiene pertanto:

$(k-h-1)^2(2-2h) = 4(1+h)(1-k)(1-h) \qquad (k+h-1)^2(2+2h) = 4(1-h)(1-k)(1+h).$

Le due espressioni sono uguali e la tesi è così provata.

SOLUZIONE 9: vettori



Precediamo ancora con un riferimento cartesiano ortogonale, esattamente come sopra: l'origine sarà il punto medio dell'ipotenusa BC; i punti B, C e O avranno coordinate $B(-1,0)$, $C(1,0)$ e $O(0,-1)$; il punto A avrà coordinate $A(h,k)$ e pertanto $h^2+k^2=1$.

Dal momento che si ha $\cos\widehat{OAB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|}$ e $\cos\widehat{OAC} = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AO}|}$,

provare che $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AC}|}$ equivale a provare che $\cos\widehat{OAB} = \cos\widehat{OAC}$,

ossia $\widehat{OAB}=\widehat{OAC}$, che corrisponde alla tesi. Le componenti cartesiane di questi vettori sono: $\overrightarrow{AO}=(h,k+1)$, $\overrightarrow{AB}=(h+1,k)$, $\overrightarrow{AC}=(h-1,k)$. Si ha pertanto:

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{h^2+h+k^2+k}{\sqrt{(h+1)^2+k^2}} = \frac{1+h+k}{\sqrt{2+2h}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+h}+\frac{k}{\sqrt{1+h}}\right)$$

$$\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{h^2-h+k^2+k}{\sqrt{(h-1)^2+k^2}} = \frac{1-h+k}{\sqrt{2-2h}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-h}+\frac{k}{\sqrt{1-h}}\right).$$

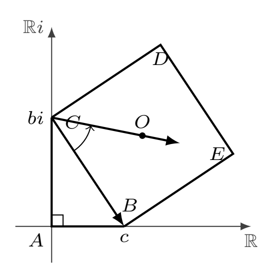
Si tratta dunque di dimostrare che $\sqrt{1+h}+\dfrac{k}{\sqrt{1+h}} = \sqrt{1-h}+\dfrac{k}{\sqrt{1-h}}$.

Entrambe le quantità sono positive. Elevando al quadrato i due membri, si ottiene:

$1+h+\dfrac{k^2}{1+h}+2k = 1-h+\dfrac{k^2}{1-h}+2k$, che equivale a $2h = k^2\left(\dfrac{1}{1-h}-\dfrac{1}{1+h}\right)$, ossia $2h = k^2\dfrac{2h}{1-h^2}$,

vale a dire $1 = \dfrac{k^2}{1-h^2}$, il che è vero per la relazione $h^2+k^2=1$.

SOLUZIONE 10: numeri complessi



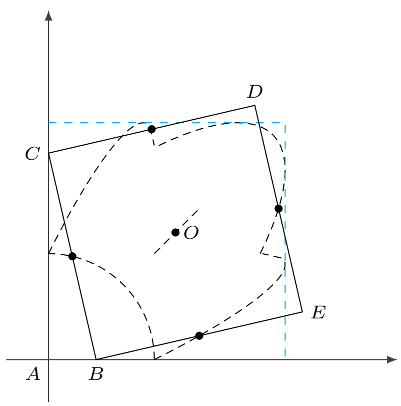
Associamo a ciascun punto della figura un numero complesso. Posto $\overline{AB}=c$ e $\overline{AC}=b$, associamo al punto A il numero 0, al punto B il numero reale c, al punto C il numero immaginario bi. Si tratta di stabilire quale numero complesso z_o corrisponda al centro del quadrato O. Si raggiunge il punto O attraverso una rotazione di 45° di B (con centro C), seguita da una dilatazione di fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (sempre con centro C). Una rotazione di 45° corrisponde alla moltiplicazione per il numero $e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4}+i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$. Si ottiene pertanto:

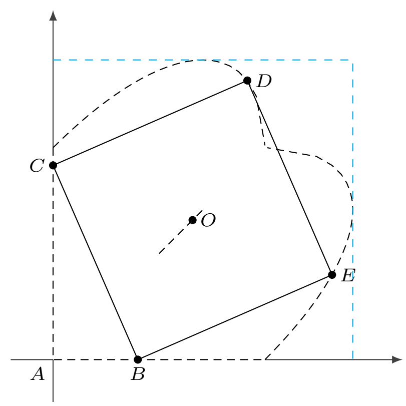
$z_o - bi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)(c-bi) = \frac{1}{2}(c+b+ci-bi)$, da cui $z_o = \frac{1}{2}(c+b)+\frac{1}{2}(c+b)i$.

La parte reale e la parte immaginaria del numero z_o sono quindi uguali tra loro (pari alla semisomma dei due cateti). Significa che il punto O giace sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ (la distanza dalle due rette è proprio la semisomma dei cateti).

Quest'ultima figura suggerisce la possibilità di immaginare il problema in termini cinematici. Se i vertici B e C del quadrato, di lato fissato $\overline{BC} = a$, sono liberi di muoversi su due aste perpendicolari, il centro descriverà una traiettoria rettilinea sulla bisettrice tra le due aste. La minima e la massima distanza da A che il centro può raggiungere sarannno $a/\sqrt{2}$ e a. Naturalmente, ci si può domandare quale sia la traiettoria di altri punti diversi dal centro.

Come esempio, nei due diagrammi sottostanti sono riportate le traiettorie descritte, rispettivamente, dai punti medi dei lati e dai vertici del quadrato $BCDE$. Nel primo caso, il punto medio di BC descrive un quarto di circonferenza (di centro A e raggio $\frac{a}{2}$); il punto medio di DE descrive un arco di ellisse (con semiassi di misure $\frac{a}{2}$ e $\frac{3}{2}a$; i fuochi si trovano sulla bisettrice di $\widehat{A}$, a distanza $\sqrt{2}\,a$ da A); i punti medi degli altri due lati descrivono altri due archi di ellisse (semiassi $\frac{\sqrt{2}-1}{2}a$ e $\frac{\sqrt{2}+1}{2}a$). Nel secondo caso, due tratti rettilinei e due archi di ellisse. In entrambi i casi, i 4 tratti si raccordano nelle posizioni dove i 4 punti vengono a trovarsi quando un vertice del quadrato va a coincidere con A. Non è difficile vedere che le traiettorie sono contenute in due quadrati, di lati $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ e $\sqrt{2}\,a$.





Al termine di questa panoramica (e senz'altro ci saranno altre strade ancora), viene da chiedersi se la versatilità del quesito abbia potuto se non altro incoraggiare le preferenze dei giovani candidati, nonostante la progressiva messa ai margini della geometria. Un esempio lampante di quanto salda e vitale sia l'interconnessione tra lo sguardo geometrico e lo sguardo algebrico ed il sapere matematico in generale (e non solo). Sarebbe quanto mai interessante avere dati statistici precisi in merito alle scelte dei maturandi e potervi riflettere.

Paolo Francini
Liceo Scientifico Cavour, Roma