A002: Esame di Stato Conclusivo del Secondo Ciclo di Istruzione

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,

LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EAI02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il CANDIDATO RISOLVA UNO DEI DUE PROBLEMI E RISPONDA A 4 QUESITI DEL QUESTIONARIO.

Problema 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y=f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.

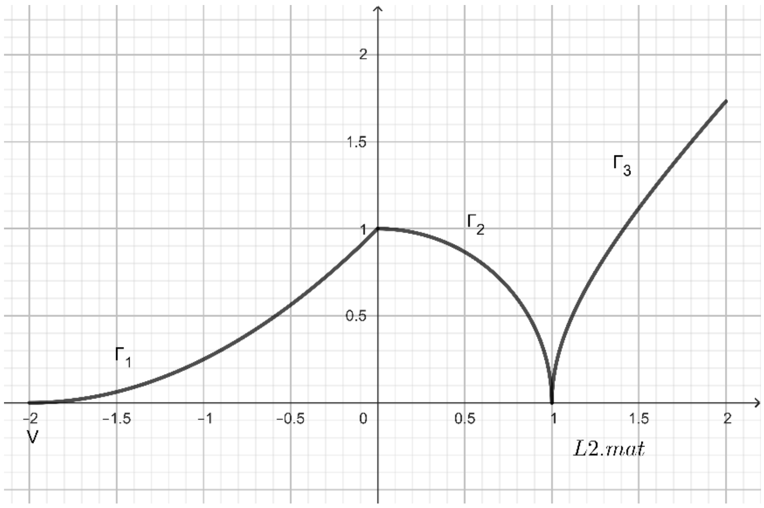

Figura 1

a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo [-2;2], utilizzando le equazioni:
$y=a(x+2)^2$, $x^2+y^2+b=0$, $x^2-y^2+c=0$
e individuare i valori opportuni per i parametri reali *a*, b, c.
Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa $x=-2$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.

b) A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

c) Si consideri la funzione $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo [-2;0], di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x=k$ divida S in due regioni equivalenti.

Elaborazioni

a) Osservando il grafico assegnato si riconosce che la curva è composta dall'arco della parabola avente equazione $y=a(x+2)^2$, con *a* parametro da determinare, con x variabile nell'intervallo [-2;0]. Ebbene, la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, vertice nel punto V(-2;0).

Per determinare il valore del parametro *a* si impone il passaggio della curva dal punto A di coordinate (0;1) in cui (si rileva dal grafico assegnato) la parabola in questione taglia l'asse delle ordinate; con detta condizione si ottiene l'equazione che permette di ricavare il valore di *a*.

$A(0;1) \in \Gamma_1 : y = a(x+2)^2 \Rightarrow 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$. L'equazione dell'arco di curva parabolico è:

$\Gamma_1 : y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, con $-2 \leq x \leq 0$.

Per quanto riguarda l'arco relativo all'intervallo [0;1], è un quarto della circonferenza avente centro nell'origine e raggio uno, la cui equazione è $x^2+y^2=1$, e pertanto in base alla formulazione dell'equazione data nel testo si deduce che deve essere b = -1.

L'espressione esplicita di y in funzione di $x \in [0;1]$ per l'equazione dell'arco è: $\Gamma_2 : y = \sqrt{1-x^2}$.

Infine, il terzo arco appartiene ad un'iperbole la cui equazione è fornita con la presenza del parametro c; l'iperbole ha gli assi cartesiani come propri assi di simmetria (l'origine è il centro dell'iperbole). Poiché il punto (1; 0) risulta essere un vertice reale dell'iperbole, imponendo che la curva passi per quel punto si determina il valore del parametro c. Si ricava c = -1, quindi l'equazione dell'iperbole è $x^2 - y^2 = 1$.

La forma analitica esplicita dell'arco di iperbole è $\Gamma_3 : y = \sqrt{x^2 - 1}$, con $1 \leq x \leq 2$.

A questo punto possiamo formalizzare la definizione esplicita della funzione definita per casi come segue:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & per \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1-x^2} & per \quad 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & per \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Utilizzo ora GeoGebra per costruire geometricamente la curva-grafico della funzione in oggetto. Sono necessari tre comandi nei quali, per ciascun arco, si utilizza una particolare rappresentazione parametrica.

- Per l'arco parabolico il comando è: Curva(t,(t+2)^2/4,t,-2,0), col parametro $t \in [-2;0]$;
- per l'arco di circonferenza il comando è: Curva(t, sqrt(1-t^2), t, 0, 1), col parametro $t \in [0;1]$;
- per l'arco di iperbole il comando è: Curva(t, sqrt(t^2-1), t, 1,2), col parametro $t \in [1;2]$.

Equazioni delle tangenti nei punti di ascissa *x* = -2, *x* = 0, *x* = 1, *x* = 2

Premettiamo che relativamente ad una funzione di equazione $y = f(x)$, qualora la stessa in un punto x_0 del suo dominio sia derivabile esiste la retta tangente t al grafico della funzione e l'equazione cartesiana della retta è t: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (1).

Nel punto di ascissa $x = -2$ la retta tangente è l'asse delle ascisse: y=0. Infatti, il punto V(-2;0) è il vertice della parabola alla quale appartiene l'arco in oggetto, come precisato sopra.

Nel punto $x = 0$, che è angoloso, non esiste la tangente al grafico della funzione, bensì esistono la semitangente sinistra t^- e la semitangente destra t^+; le rispettive equazioni sono: $t^-: y = x+1$, $t^+: y = 1$.

Nel punto di ascissa $x = 1$ il grafico presenta una cuspide con la punta rivolta verso il basso. In tale punto la funzione non è derivabile (come si precisa nello sviluppo del successivo punto **b**)), le due semitangenti destra e sinistra sono coincidenti ed hanno equazione $x = 1$.

(1) Espressione della derivata prima

Nel punto di ascissa x =2 esiste la retta tangente al grafico ed ha equazione $t: y-f(x)=f'(2)(x-2)$ $\rightarrow\ y-\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) \rightarrow\ y=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

b) Nel testo del problema l'Autore invita lo studente a **dedurre dal grafico della funzione rappresentata quello della sua derivata prima** e **precisare la concavità e la convessità della funzione integrale** di punto iniziale x = -2 della funzione $y = f(x)$.

Ebbene, per quanto concerne la prima richiesta si può rispondere al quesito disegnando approssimativamente il grafico della funzione derivata prima dopo aver fatto delle osservazioni particolari sulle caratteristiche geometriche dei tre archi. Evidentemente, se si intende essere più precisi e realizzare un grafico anche quantitativo della funzione derivata prima occorrerà sfruttare l'espressione analitica dell'equazione rappresentativa.

Riporteremo più avanti l'esplicitazione formale della funzione derivata prima.

Possiamo anticipare che la funzione $y=f(x)$ non è certamente derivabile nei punti x=0 e x =1, perché sono entrambi angolosi; il **punto** x = 1 è addirittura **cuspidale** [(2)]**.** La funzione è invece derivabile in tutti gli altri punti del dominio [-2;2].

Per quanto riguarda il segno della derivata prima riconosciamo che:

$f'(x)>0$ in ciascuno dei due intervalli aperti]-2;0[,]1;2[, perché in ciascuno di essi la funzione $y=f(x)$ è strettamente crescente;

$f'(x)<0$ nell'intervallo]0;1[perché in esso la funzione $y=f(x)$ è strettamente decrescente.

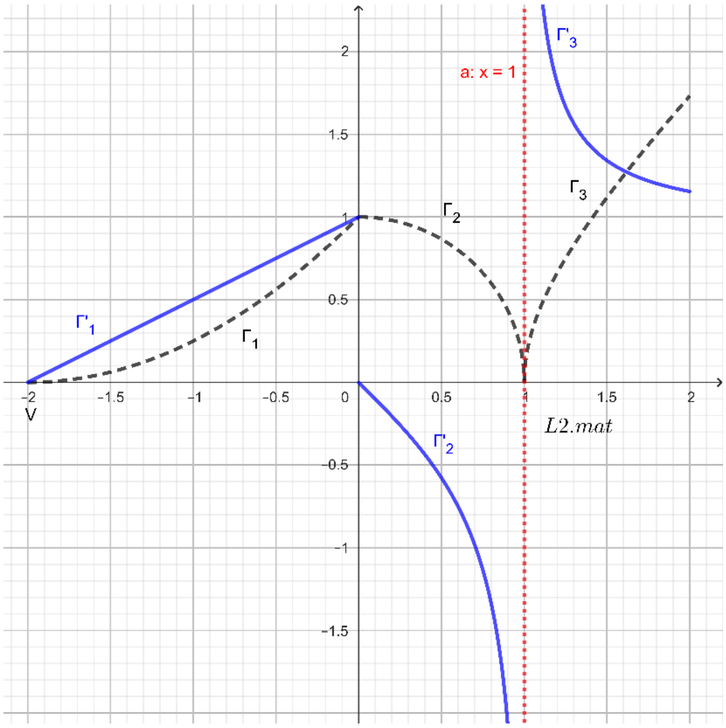

Figura 2- Il diagramma della funzione $y=f(x)$ è riportato con linea stile-trattino per distinguerlo dal diagramma della funzione $y=f'(x)$.

Per disegnare in qualche modo il grafico della funzione $y=f'(x)$ è bene tenere presente le espressioni analitiche della stessa nei diversi intervalli. Le esplicitazioni sono:

[(2)] Precisazione sui punti angolosi. Un **punto del diagramma di una funzione (x_0;$f(x_0)$) è detto angoloso** se in quel punto esistono le due *semi-tangenti* al grafico della funzione ed hanno inclinazioni diverse. Un particolare tipo di punto angoloso è il **punto cuspidale** classificato di seguito nel caso c).
Esistono diverse tipologie di punti angolosi.

a) Entrambi gli angoli formati dalle semi-tangenti con la direzione positiva dell'asse delle ascisse hanno ampiezze diverse da 90°; in questo caso i **valori** della derivata sinistra $f'_{-}(x_0)$ e quello derivata destra $f'_{+}(x_0)$ sono **finiti e diversi tra loro**.
b) Il valore di una derivata laterale è finito e l'altro è +∞ o - ∞.
c) Uno dei due valori delle derivate laterali è +∞ e l'altro - ∞. In questo caso il **punto (x_0;$f(x_0)$) è detto cuspidale**. In particolare, se risulta $f'_{-}(x_0)=-\infty$ e $f'_{+}(x_0)=+\infty$ la **cuspide** ha la punta rivolta **verso il basso**, invece se $f'_{-}(x_0)=+\infty$ e $f'_{+}(x_0)=-\infty$ la **cuspide** ha la punta rivolta **verso l'alto**. Nei punti cuspidali le due semi-tangenti sono semirette parallele all'asse delle ordinate e coincidono.

In ciascuno dei punti angolosi la funzione non è derivabile.
Pe la funzione in esame **il punto (1;0) e cuspidale con la punta della cuspide rivolta verso il basso**.

$$y=f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+2) & per \quad -2\le x<0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & per \quad 0<x<1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & per \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

Rappresentazione del diagramma della funzione derivata prima. Operando con GeoGebra, riprendiamo il file dell'applicazione utilizzata per costruire il diagramma della funzione *y=f* (*x*) ed inseriamo i comandi per la costruzione e la rappresentazione del grafico della funzione derivata prima. I comandi da inserire sono i seguenti:

a) Curva(t, (t+2)/2, t, -2, 0), per l'intervallo [-2;0[.

   Poiché $f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)$, il diagramma è composto dal segmento congiungente i punti (-2;0), (0;1).

b) Curva(t, -t/sqrt(1-t^2), t, 0, 1), per l'intervallo]0;1[.

Questo arco ha la concavità rivolta verso il basso e nel punto $x = 1$ ha come asintoto verticale la retta $x = 1$.

c) Curva(t, t/sqrt(t^2-1), t, 1, 2), per l'intervallo]1;2[.

   Questo arco ha la concavità rivolta verso l'alto e la retta $x = 1$ è asintoto verticale.

In Figura 2 sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni *y=f* (*x*) e *y=f'*(*x*).

Concavità e convessità della funzione integrale

Osserviamo innanzitutto che la funzione di partenza *y=f* (*x*) è continua in tutto l'intervallo. Un'altra proprietà della stessa e che in ciascun punto di definizione la funzione assume valori non negativi. Queste due proprietà conferiscono al**la funzione integrale di punto iniziale x_0 = -2** le proprietà di essere continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo [-2;2] e **strettamente crescente internamente allo stesso intervallo**. Per quanto concerne la derivabilità è noto dalla teoria che *la derivata prima della funzione integrale coincide punto per punto con la funzione integranda*; quindi, la derivata prima è definita ovunque ed è continua. La derivata seconda della funzione integrale è la derivata prima della funzione integranda per la quale abbiamo già precisato che esiste in tutti i punti dell'intervallo [-2;2], esclusi i punti $x = 0$, $x = 1$. Pertanto, in tutti gli altri punti dell'intervallo [-2;2] si può classificare la concavità.

Nell'intervallo]-2;0[la derivata seconda della funzione integrale è la funzione $y=(x+2)/2$ che è positiva, quindi **la funzione integrale è convessa** (la concavità del suo diagramma è rivolta verso l'alto)**. Nell'intervallo]0;1[** la funzione integrale ha come derivata seconda la funzione $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, che è negativa, quindi **la funzione integrale è concava** (la concavità del suo diagramma è rivolta verso il basso). **Nell'intervallo]1;2[** la derivata seconda della

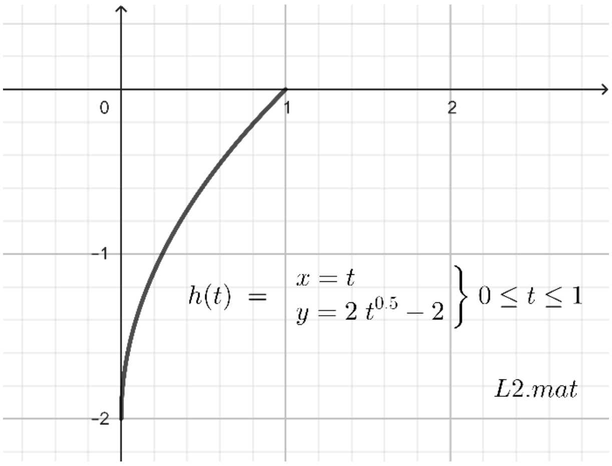

Figura 3- Grafico della funzione inversa $h(t)=f^{-1}(t)=$ $h(t)=2\sqrt{t}-2$, con $t\in[0;1]$.

funzione è la funzione $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, che è positiva, dunque **la funzione integrale** ha la concavità rivolta verso l'alto, cioè **è convessa**.

c) La restrizione della funzione *y*=*f*(*x*) all'intervallo [-2;0] ha equazione $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$. In ogni punto interno all'intervallo ha derivata prima positiva *y'*=(*x*+2)/2 perciò la funzione è strettamente crescente. Considerando la funzione su tutto l'intervallo [-2;0], ha come codominio l'intervallo [0;1] ed è invertibile. Il testo del problema suggerisce di denominare con **h** la **funzione inversa**.

$f: x\in[-2;0] \rightarrow \; y=f(x)\in[0;1]$, con $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2$ funzione biunivoca.

La funzione inversa $x=f^{-1}(y)$ formalmente è così definita

$f^{-1}: y\in[0;1] \; \rightarrow f^{-1}(y)\in[-2;0]$, con $f^{-1}(y)=2\sqrt{y}-2$

La funzione $h(y)=2\sqrt{y}-2$ è derivabile $\forall y\in]0;1]$, con derivata prima $h'(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$.

Il grafico della funzione **h** è rappresentato in Figura 3.
Il diagramma della funzione h è stato ottenuto con GeoGebra con il comando
Curva(t, 2*t^0.5-2, t, 0, 1).

d) Per risolvere il quesito proposto si devono determinare i valori dei due integrali definiti $\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(x+2)^2\,dx$, $\int_{k}^{0}\frac{1}{4}(x+2)^2\,dx$, con k∈]-2;0[ed imporre che siano uguali; l'uguaglianza ottenuta permetterà di ricavare il valore di *k* per il quale la retta *x* = *k* divide la regione del sottografico della funzione *y*=*f* (*x*) corrispondente all'intervallo [-2;0] in due regioni aventi la stessa area (regioni equiestese).

Calcolo degli integrali definiti

$$\int_{-2}^{k}\frac{1}{4}(x+2)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{k} = \frac{1}{12}\left[(k+2)^3-0\right]=\frac{(k+2)^3}{12};$$

$$\int_{k}^{0}\frac{1}{4}(x+2)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{k}^{0} =$$

$$\frac{1}{12}\left[8-(k+2)^3\right]$$

Risoluzione dell'equazione

$$\frac{(k+2)^3}{12}=\frac{1}{12}\left[8-(k+2)^3\right]\rightarrow \; 2(k+2)^3=8\rightarrow$$

$$k=\sqrt[3]{4}-2$$

L'area di ciascuna delle due regioni ottenute vale

$$Area=\frac{\left(\sqrt[3]{4}-2+2\right)^3}{12}=\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

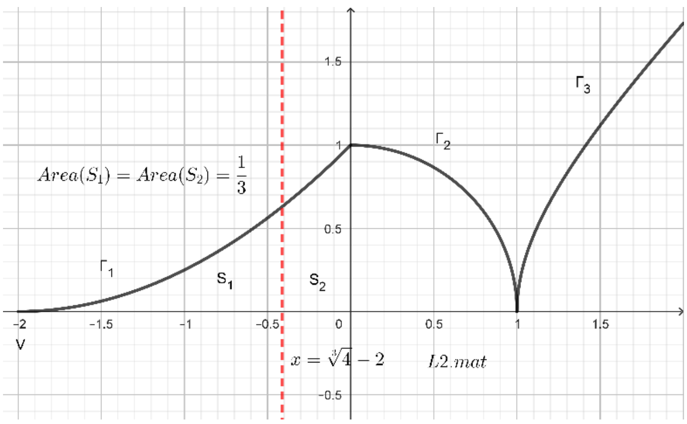

Figura 4

In Figura 4 si possono leggere alcuni dettagli.