Esami di Stato 2023 – Sessione suppletiva – Seconda prova scritta – Liceo Scientifico
Quesiti

TRACCE.

1. Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G" i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento G'G" è parallelo a BC.

2. Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

3. Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

4. Una sfera, di raggio *r* fissato, è inscritta nel cono *S* di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

6. Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

7. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2 - 1) \cdot e^{2t}}{(x-1)^2} dt$$

8. Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b). Si considerino le seguenti affermazioni

A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$"

e

B: "$\exists\ x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$".

Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b).

1. $A \Longrightarrow B$
2. $B \Longrightarrow A$
3. $A \Longleftrightarrow B$
4. $B \Longleftrightarrow A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi

RISOLUZIONE.

1. È necessario ricordare che il baricentro di un triangolo, ovvero il punto comune alle sue mediane, divide ogni mediana il due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

Bisogna tener presenti inoltre semplici proprietà dei vettori. Giacché è proprio sulla base del calcolo vettoriale che si ottiene quella che, a mio giudizio, è la dimostrazione più semplice e immediata.

Considerato allora il triangolo ABC e preso un qualsiasi punto P sul lato BC, sia G' il baricentro del triangolo APB e sia G'' quello del triangolo APC (figura 1).

Si ha:

$$\overrightarrow{G'G''} = \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AG''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}.$$

Questo prova che i due vettori $\overrightarrow{G'G''}$ e $\overrightarrow{DE}$ hanno la stessa direzione e, pertanto, come volevasi dimostrare, il segmento G'G" è parallelo a BC.

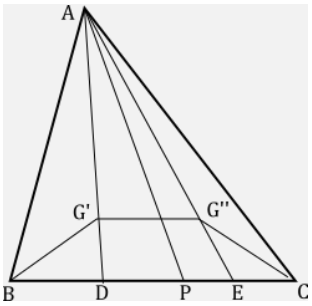

figura 1

2. Dire che il dado è regolare dovrebbe significare che le sei facce hanno la medesima probabilità p di uscire e cioè $1/6$. Ammettiamo che sia così.

- La probabilità di ottenere per $k = 3$ volte in $n = 8$ lanci una stessa faccia (in particolare la faccia "5") è, in base alle proprietà della variabile binomiale B:

$$P(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 10{,}42\% .$$

- Se una data faccia (in particolare la faccia "5") esce per la terza volta all'ottavo lancio, ciò vuol dire semplicemente che nei precedenti 7 lanci quella faccia è uscita esattamente 2 volte, indipendentemente da quando ciò è accaduto. Bisogna quindi calcolare la probabilità p' che in 7 lanci la faccia "5" esca 2 volte (evento E') ed esca poi all'ottavo lancio (evento E").

Tenuto presente che le uscite nei vari lanci sono eventi tra loro indipendenti, per il principio delle probabilità composte la probabilità che la faccia "5" esca per la terza volta all'ottavo lancio è pertanto:

$$p' = p(E') \cdot p(E'') = \left(\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right) \approx 3{,}90\% .$$

3. Il fatto che il piano α di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$ debba essere tangente alla superficie sferica nel punto $P(-1,2,3)$ comporta che il centro C della superficie sferica debba trovarsi sulla retta p perpendicolare ad α nel punto P. Ora la retta p, avendo parametri direttori (3, 4, -5) e dovendo passare per P, ha le seguenti equazioni parametriche:

$$p \equiv \begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = 4k + 2 \\ z = -5k + 3 \end{cases}$$

Deve essere poi $\overline{CP}=5\sqrt{2}$ ossia $\overline{CP}^2=50$. D'altro canto si ha:

$$\overline{CP}^2 = (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 + (z_P - z_C)^2 =$$
$$= (-1 - 3k + 1)^2 + (2 - 4k - 2)^2 + (3 + 5k - 3)^2 = 50k^2 .$$

Di conseguenza, deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$50\,k^2 = 50 \quad \text{ossia} \quad k = \pm 1 .$$

Si ottengono dunque due sfere, una avente il centro nel punto $(2, 6, -2)$, l'altra nel punto $(-4, -2, 8)$.

Le loro equazioni sono pertanto le seguenti:

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 \text{ ossia } \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 4z - 6 = 0 ;$$

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-8)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 \text{ ossia } \quad x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 16z + 34 = 0 .$$

4. Sia S il cono di vertice V, apotema VA e raggio di base HA e sia C il centro della sfera di raggio r inscritta in esso. In figura (figura 2) è rappresentata una sezione meridiana dei due solidi, vale a dire un triangolo isoscele e un cerchio, ed è indicato con T il punto di tangenza di VA con la circonferenza.

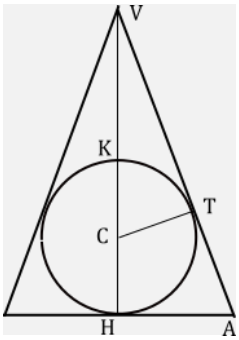

figura 2

Il volume del cono è dato dalla seguente relazione:

$$V = \frac{1}{3}\pi\,\overline{HA}^2 \cdot \overline{VH}\,.$$

Posto $\overline{VC}$=x, con x>r, si tratta di esprimere $\overline{HA}$ e $\overline{VH}$ in funzione di x.

Immediatamente risulta:

$$\overline{VH} = \overline{VC} + \overline{CH} = x + r\,, \qquad \overline{VT} = \sqrt{\overline{VC}^2 - \overline{CT}^2} = \sqrt{x^2 - r^2}\,.$$

Inoltre, dall'evidente similitudine dei triangoli rettangoli VHA e VTC, si ha:

$$\frac{\overline{VH}}{\overline{VT}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{CT}}\,, \text{ da cui segue: } \overline{HA} = \frac{\overline{VH}\cdot\overline{CT}}{\overline{VT}} = \frac{(x+r)\cdot r}{\sqrt{x^2 - r^2}}\,.$$

Si ha pertanto:

$$V(x) = \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{(x+r)\cdot r}{\sqrt{x^2 - r^2}}\right)^2 \cdot (x+r) \quad \text{ossia:} \quad V(x) = \frac{\pi\, r^2}{3}\cdot\frac{(x+r)^2}{x-r}\,.$$

Si tratta, a questo punto, di rendere minima la funzione:

$$f(x) = \frac{(x+r)^2}{x-r}\,, \quad \text{con} \quad x > r\,.$$

Si ha intanto:

$$f'(x) = \frac{2\,(x+r)\,(x-r) - (x+r)^2}{(x-r)^2} = \frac{(x+r)\,(x-3\,r)}{x-r}\,.$$

Tenendo presente che x+r e x–r sono entrambi positivi per x>r, il segno di $f'(x)$ dipende esclusivamente da x–3r, ed è positivo per x>3r e negativo per x<3r. Cosicché f(x) e, di conseguenza V(x), decresce per x<3r e cresce per x>3r. Ragion per cui V(x) è minimo per x=3r, ovvero per $\overline{VC}$=3r .

Nel qual caso, la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera è:

$$\overline{VK} = \overline{VC} - \overline{KC} = 3r - r = 2r\,.$$

5. Posto che la curva di equazione $y = x^3 + kx$ sia tangente alla retta di equazione $y = x - 2$, significa che le due curve hanno un punto in comune, per cui deve essere

$$x^3 + kx = x - 2\,,$$

e significa pure che hanno la stessa pendenza in quel punto, per cui deve essere:

$$3\,x^2 + k = 1\,.$$

Da questa seconda equazione si ricava k:

$$k = 1 - 3x^2\,.$$

Sostituendo questo valore nella prima equazione, si ottiene:

$$x^3 + (1 - 3x^2)\,x = x - 2 \quad \text{da cui segue:} \quad x^3 = 1 \quad \text{e perciò:} \quad x = 1.$$

Si ottiene, di conseguenza:

$$k = -2\,.$$

È il valore cercato di k, per il quale la curva e la retta assegnate risultano tangenti. Il loro punto di contatto ha evidentemente ascissa $x = 1$ e ordinata $y = -1$.

6. Sia y=p(x) una generica equazione polinomiale di 3° grado:

Dovendosi annullare solamente per x=0 e x=3 ed essendo il suo grafico tangente all'asse x, il punto di tangenza può essere solo ed esclusivamente uno di quei due punti.

Nel caso che esso sia x=0, p(x) deve essere del tipo seguente:

$$p(x) = h\,x^2\,(x-3)\,.$$

Nel caso che il punto di tangenza sia x=3, p(x) deve essere del tipo seguente:

$$p(x) = k\,x\,(x-3)^2\,.$$

Siccome poi il grafico del polinomio deve passare per il punto $P(1,-4)$, nel primo caso deve risultare:

$$-4 = h\cdot 1\cdot(-2) \quad \text{da cui segue:} \quad h = 2\,;$$

nel secondo caso deve risultare:

$$-4 = k\cdot 1\cdot(-2)^2 \quad \text{da cui segue} \quad k = -1\,.$$

Si ottengono pertanto i due polinomi seguenti:

$$y = 2\,x^3 - 6\,x^2, \quad y = -\,x^3 + 6\,x^2 - 9\,x\,.$$

I due polinomi sono rappresentati in figura (figura 3): in blu il primo polinomio, in rosso il secondo.

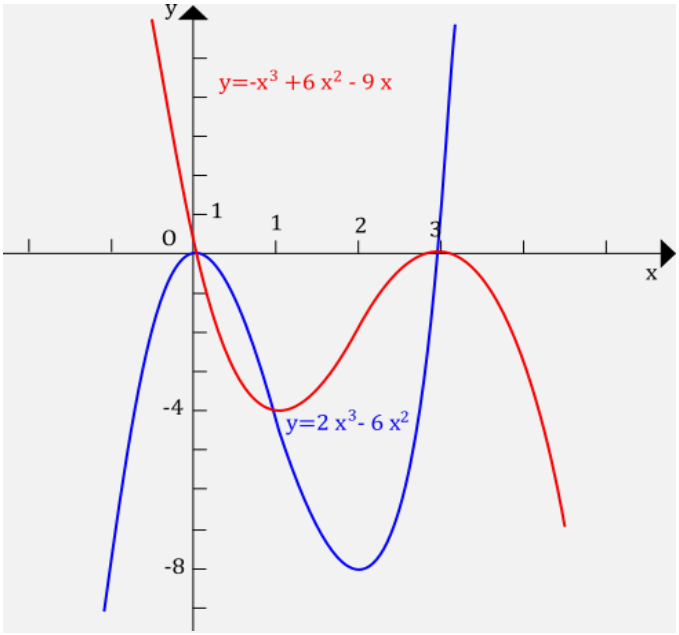

figura 3

Nel caso del primo polinomio, l'area A' della regione delimitata dal suo grafico e dall'asse x è la seguente:

$$A' = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)\,dx = \left[-\frac{2}{4}\,x^4 + \frac{6}{3}x^3\right]_0^3 = -\frac{1}{2}\cdot 81 + 2\cdot 27 = \frac{27}{2}\,.$$

Nel caso del secondo polinomio, l'area A" della regione delimitata dal suo grafico e dall'asse x è la seguente:

$$A'' = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left[\frac{1}{4}\,x^4 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{4}\cdot 81 - 2\cdot 27 + \frac{9}{2}\cdot 9 = \frac{27}{4}\,.$$

Vale a dire che la seconda area è la metà della prima.

Nota Bene.

La curva di equazione $y = -\,x^3 + 6\,x^2 - 9\,x$ è la trasformata della curva di equazione $y = 2\,x^3 - 6\,x^2$ mediante l'affinità di equazioni: $\left\{X = x + 1,\ Y = -\frac{1}{2}\,y - 4\right\}$. Cosa che può essere verificata facilmente.

Il modulo di questa trasformazione è $1/2$, il che spiega perché la precedente area A" è la metà dell'area A'.

In effetti, la regione delimitata dall'asse x e dalla curva di equazione $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ è simmetrica (e quindi di uguale area) rispetto al suo punto di flesso (2, 2), della regione delimitata dalla retta di equazione $y = -4$ e dalla stessa curva; la quale regione è, a sua volta, la corrispondente della regione di area A' nell'affinità considerata e per questo ha area uguale ad $1/2$ di A'.

7. La funzione

$$\frac{\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}}{(x-1)^2}$$

è, per $x \to 1$, una forma indeterminata del tipo $0/0$. Siccome ce ne sono le condizioni (numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili su tutto l'asse reale), possiamo ricorrere alla regola di De L'Hôpital. Si ha pertanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}}{(x-1)^2} dt = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}\right)}{\frac{d}{dx}(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{[\,(t^2-1)\,e^{2t}\,]_1^x}{2\,(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\,e^{2x}}{2\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\,e^{2x}}{2} = e^2\,.$$

8. Ricordiamo un noto teorema che diamo per dimostrato:

Se una funzione f(x) è derivabile in un punto x_0 di un dato intervallo, condizione NECESSARIA ma NON SUFFICIENTE affinché x_0 sia un punto estremante (cioè un massimo o un minimo locale) di f(x) (proposizione A) è che risulti $f'(x_0) = 0$ (proposizione B).

Il teorema, dunque, assicura che *è vera l'implicazione* $A \Longrightarrow B$, la quale per l'appunto recita che B è condizione *necessaria* per A.

Ora, però, il fatto che sia $f'(x_0) = 0$ non autorizza a concludere che il punto x_0 si un punto estremante di f(x). Può esserlo, naturalmente, ma può non esserlo. Infatti x_0 potrebbe essere un punto di flesso con tangente orizzontale. Come, tanto per fare un esempio, il punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = x^3$.

Insomma, la condizione B *non è sufficiente* per A, ossia l'implicazione $B \Longrightarrow A$ *è falsa*.

Di conseguenza, *sono false entrambe le coimplicazioni* $A \Leftrightarrow B$ e $B \Leftrightarrow A$, che risulterebbero vere solo se fosse vero che $A \Rightarrow B \ \wedge B \Longrightarrow A$. Cosa che invece non è.