Il testo che segue è stato reperito in Internet e sono fatti salvi tutti i diritti d'Autore

Sessione suppletiva 2023
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO, LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Assegnata la funzione

$$f(x) = a\,x\,ln\,(x) - \frac{3}{2}x$$

a) determinare il valore del parametro reale a in modo che f abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q(0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.

c) Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \frac{x+h}{x+k}$$

risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

CONFORME ATTI MIM

*** ***

Risoluzione del

Problema 1-della sessione suppletiva del 6-07-2023

a) La funzione assegnata $f(x)=a\cdot x\cdot\ln(x)-\frac{3}{2}x$ è trascendente logaritmica mista ed è definita pe $x>0$, nonché parametrica nel parametro a. Si deve determinare per quale valore del parametro la funzione ammette nel punto $x=\sqrt{e}$ un minimo assoluto.
Ricordiamo che per *una qualsiasi funzione reale di variabile reale f:A→R, A⊆R, affinché in un punto x_0 interno al dominio di definizione ammetta un minimo relativo è sufficiente che nel suddetto punto la funzione sia derivabile almeno due volte, abbia la derivata prima nulla e il valore della derivata seconda sia positivo.* Riconosceremo che per la funzione in oggetto le condizioni suddette assicureranno che il punto $x_0=\sqrt{e}$ sarà addirittura di minimo assoluto. Pertanto, per determinare il valore del parametro imponiamo dette condizioni, cioè $f'(\sqrt{e})=0$ e $f''(\sqrt{e})>0$.

Calcoliamo le espressioni delle funzioni derivata prima e derivata seconda:

$f'(x)=\ a\cdot 1\cdot\ln(x)+a\cdot x\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=\ a\cdot\ln(x)+a-\frac{3}{2}$; $\quad f''(x)=a\cdot\frac{1}{x}$.

I valori delle derivate prima e seconda nel punto $\sqrt{e}$ sono:

$f'(\sqrt{e})=a\cdot\ln(\sqrt{e})+a-\frac{3}{2}\ =\frac{a}{2}+a-\frac{3}{2}=\frac{3a}{2}-\frac{3}{2}$; $f''(\sqrt{e})=\frac{a}{\sqrt{e}}$.

Deve dunque risultare:

$\frac{3a}{2}-\frac{3}{2}=0$, da cui a=1 e questo valore del parametro rende anche positiva la derivata seconda nel punto $x_0=\sqrt{e}$, risultando $f''(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}$. La funzione in oggetto è così definita: $f(x)=x\cdot\ln(x)-\frac{3}{2}x$.

Studio della funzione e rappresentazione del suo grafico

a.1) La funzione è definita $\forall x>0$

a.2) Segno e zeri

$f(x)=x\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow\ \ln(x)-\frac{3}{2}\geq 0\Leftrightarrow\ \ x\geq e^{\frac{3}{2}}$, quindi $x\geq e\sqrt{e}$. Il grafico della funzione taglia l'asse delle ascisse nel punto $(e\sqrt{e};0)$; la funzione è negativa nell'intervallo $]0;e\sqrt{e}[$ e positiva nell'intervallo $]e\sqrt{e};+\infty[$.

a.3) Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio di definizione è l'insieme $\{0;+\infty\}$. Dobbiamo studiare i limiti della funzione in ciascuno dei punti indicati. Risulta:

$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln(x)-\frac{3}{2}x\right)=\ \lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(x)-\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2}x$ = [(1)] $=0-0=0$;

$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln(x)-\frac{3}{2}x\right)=\ \lim_{x\to+\infty}x\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)=\ +\infty\left(+\infty-\frac{3}{2}\right)=+\infty$.

(1) Si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to 0^+}x^r\cdot\ln(x)=0$, $\forall r>0$

Possiamo provare che il grafico della funzione non ammette alcun asintoto per $x \to +\infty$. Infatti, risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) = +\infty - \frac{3}{2} = +\infty \ .$$

a.4) Monotonìa, crescenza, decrescenza, punti di massimo e/o di minimo relativi o assoluti.

Segno e zeri della derivata prima

$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$. La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]0;\sqrt{e}[$, strettamente crescente nell'intervallo $]\sqrt{e};+\infty[$; pertanto, il punto $x = \sqrt{e}$ è di minimo relativo proprio, nonché di minimo assoluto. Il valore del minimo è

$$\min = f\left(\sqrt{e}\right) = \sqrt{e} \cdot \left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{e} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(e) - \frac{3}{2}\right) =$$

$$\sqrt{e} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\sqrt{e}$$

Il punto del grafico in cui vi è il minimo assoluto è $A\left(\sqrt{e};-\sqrt{e}\right)$.

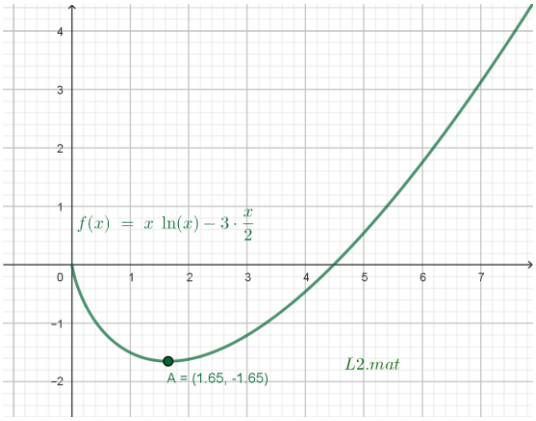

Figura 1

La funzione non ha altri punti di massimo, né di minimo relativo, e poiché la derivata seconda della funzione $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è positiva in ogni punto del dominio si deduce che la concavità del grafico è rivolta verso alto in tutto il dominio (la funzione è convessa nel suo dominio); ciò permette anche di precisare che il grafico della funzione non presenta punti di flesso di alcun genere. Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1.

b) Consideriamo ora il fascio proprio di rette di centro il punto Q(0;-1). Osserviamo subito che l'asse delle ordinate, la cui equazione é $x = 0$, non può essere una retta tangente alla grafico della funzione perché nel punto $x = 0$ la funzione non è definita; pertanto, possiamo assumere per rappresentare l'insieme delle rette del fascio proprio il modello seguente $y - y_Q = m(x - x_Q)$, quindi, $y = mx - 1$. Si tratta di determinare il valore, o i valori, del parametro m in modo che le corrispondenti equazioni rappresentino rette tangenti al diagramma della funzione.
Il testo del problema suggerisce al Candidato che ci sarà solo una retta passante per il punto Q che sarà tangente al grafico della funzione in un opportuno punto; questa proprietà sarà comunque da dimostrare nel corso della ricerca che si eseguirà. Sia intanto $T\left(x_T; f\left(x_T\right)\right)$ il presunto punto di contatto. Osserviamo che dobbiamo determinare sia il valore del coefficiente angolare m della retta tangente, sia l'ascissa del punto di contatto T (l'ordinata del punto T sarà calcolata dal valore della funzione assunto in quel punto). Dunque, dobbiamo determinare due incognite e quindi abbiamo bisogno di imporre due condizioni indipendenti. Scriviamo il sistema di equazioni formato dall'equazione della generica retta del fascio e dall'equazione della funzione in oggetto. Il sistema è:

$\begin{cases} y = mx - 1 \\ y = f(x) \end{cases}$ che rendiamo più esplicito facendo figurare le coordinate del punto di contatto T.

$\begin{cases} y_T = mx_T - 1 \\ y_T = x_T \cdot \ln(x_T) - \frac{3}{2}x_T \end{cases}$ Teniamo ora presente che **la retta tangente nel punto T** alla curva che si sta cercando **ha come coefficiente angolare il valore della derivata prima della funzione rappresentativa della curva nello stesso punto**. Poiché risulta

$f(x) = x \cdot \ln(x) - \frac{3}{2}x \rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \quad = \ln(x) - \frac{1}{2}$,

deve risultare

$m = f'(x_T) = \ln(x_T) - \frac{1}{2}$,

per cui sistema da risolvere diventa $\begin{cases} y_T = \left(\ln(x_T) - \frac{1}{2}\right)x_T - 1 \\ y_T = x_T \cdot \ln(x_T) - \frac{3}{2}x_T \end{cases}$; da confronto delle due equazioni ricaviamo l'equazione:

$\left(\ln(x_T) - \frac{1}{2}\right)x_T - 1 = x_T \cdot \ln(x_T) - \frac{3}{2}x_T$, da cui $-\frac{1}{2}x_T - 1 = -\frac{3}{2}x_T \rightarrow x_T = 1$.

Il punto di contatto tra la retta tangente cercata e il diagramma della funzione è $T\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, quindi il coefficiente angolare della retta tangente in T vale

$m = \ln(x_T) - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. L'equazione della retta per Q tangente al diagramma della funzione ha equazione $t_T : y = -\frac{1}{2}x - 1$.

In Figura 2 sono rappresentati il diagramma della funzione, la retta tangente al grafico condotta dal punto Q(0;-1) ed il punto di contatto T.

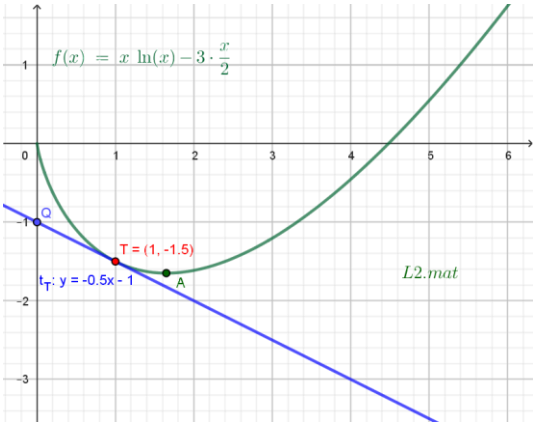

Figura 2

c) Dobbiamo determinare i valori dei due parametri **h**, **k** in modo che il grafico della funzione $y=f(x)$ e quello della funzione omografica $y = \frac{x+h}{x+k}$ risultino tangenti nel punto di ascissa uno. Il punto di contatto è proprio il punto T(1;-3/2) trovato nel precedente quesito b). T(1;f(1)) =(1;-3/2). Si deve impostare il sistema formato dalle equazioni delle due curve e si devono imporre due condizioni per la determinazione dei valori delle due incognite h, k. Evidentemente il passaggio della funzione omografica dal punto T(1;-3/2) è una condizione; per la seconda condizione basta ricordare che per definizione i grafici di due funzioni sono tangenti in un certo punto se nello stesso ammettono la stessa retta tangente e quindi se in detto punto i valori delle derivate prime delle due funzioni coincidono. Questa sarà la seconda condizione che imporremo che sia soddisfatta dai parametri h e k. Ciò fatto e si risolverà il sistema formato dalle equazioni ottenute.

$y = \frac{x+h}{x+k} \rightarrow y(1) = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{1+h}{1+k} = -\frac{3}{2}$ (prima condizione).

Per la sussistenza di questa condizione evidentemente deve risultare k≠-1.

Troviamo la derivata prima della funzione omografica.

$y' = \frac{1\cdot(x+k)-(x+h)\cdot 1}{(x+k)^2} = \frac{k-h}{(x+k)^2}$; deve risultare

$y'(1) = \frac{k-h}{(1+k)^2} = \quad f'(1) = \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Si deve risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1+h}{1+k} = -\frac{3}{2} \\ \frac{k-h}{(1+k)^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k \\ \frac{k-h}{(1+k)^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \underset{\rightarrow}{k \neq -1} \begin{cases} h = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k \\ 2(k-h) = -(1+k)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} h = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k \\ 2\cdot\frac{5}{2}(1+k) = -(1+k)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k \\ 5 = -(1+k) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = \frac{13}{2} \\ k = -6 \end{cases}.$$

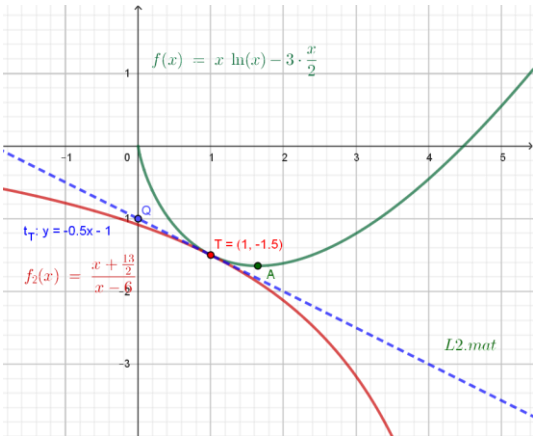

Figura 3

L'equazione della funzione omografica avente le proprietà richieste è $y = \frac{x+\frac{13}{2}}{x-6}$.

In Figura 3 sono rappresentate tutte le curve fin qui studiate.

d) La funzione integrale $g(x) = \int_1^x f(t)dt$ relativa alla funzione $y = f(x)$, di punto iniziale x = 1, è definita per ogni x del dominio della funzione integranda, quindi per ogni $x > 0$.

d.1) Esplicitazione della funzione

Si deve calcolare l'integrale definito $\int_1^x \left(t\cdot\ln(t) - \frac{3}{2}t\right)dt$. Calcoliamo prima l'integrale indefinito decomponendo la funzione integranda nella somma di due funzioni:

$\int\left(t\cdot\ln(t) - \frac{3}{2}t\right)dt = \int t\cdot\ln(t)dt - \frac{3}{2}\int t dt$; per il primo è necessario applicare il metodo di integrazione per parti, mentre il secondo integrale è immediato. Risulta:

$\int t\cdot\ln(t)dt = \frac{t^2}{2}\cdot\ln(t) - \int\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt \quad = \frac{t^2}{2}\cdot\ln(t) - \frac{t^2}{4} + c_1$, con c_1 costante reale;

$-\frac{3}{2}\int t dt = -\frac{3}{4}t^2 + c_2$, con c_2 costante reale.

L'integrale indefinito richiesto è $\int\left(t\cdot\ln(t) - \frac{3}{2}t\right)dt = \quad \frac{t^2}{2}\cdot\ln(t) - t^2 + c$, con c costante reale.

Calcoliamo ora l'integrale definito:

$\int_1^x \left(t\cdot\ln(t) - \frac{3}{2}t\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}\cdot\ln(t) - t^2\right]_1^x = \quad \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - x^2 + 1$. In conclusione, la funzione integrale è così definita: $g(x) = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - x^2 + 1$, per x>0.

d.2) Proprietà della funzione g

Poiché la funzione integranda nel suo dominio è continua, la funzione integrale g è derivabile per ogni x del dominio e la sua derivata prima coincide con la funzione f,

$g'(x) = f(x) = \quad x\cdot\ln(x) - \frac{3}{2}x \quad = x\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)$,

e la derivata seconda coincide con la derivata prima della funzione f,

$g''(x)=f'(x)\ =\ln(x)-\frac{1}{2}$.

Per la monotonìa di g riconosciamo che è strettamente crescente per $x>e^{\frac{3}{2}}$, cioè per $x>e\sqrt{e}$, mentre è strettamente decrescente per $0<x<e\sqrt{e}$; il punto $x=e\sqrt{e}$ è di minimo assoluto.

d.3) Valore del minimo assoluto

$$g\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\ \frac{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2}{2}\cdot\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)-\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2+1=\ \frac{e^3}{2}\cdot\frac{3}{2}-e^3+1=1-\frac{e^3}{4}.$$

d.4) Equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $x = e$

Sia P il punto di ascissa $x = e\rightarrow$ P(e ;g(e)).

L'equazione della retta tangente cercata si ottiene ricordando che nel modello per l'equazione della generica retta passante per il punto (x_0;y_0) avente coefficiente angolare m

$y-y_0=m(x-x_0)$,

il coefficiente angolare è uguale alla derivata prima della funzione calcolata in x_0, quindi nel nostro caso m=g' (x_0), $m=g'(e)=f(e)=$

$e\left(\ln(e)-\frac{3}{2}\right)=-\frac{e}{2}$.

Con $P\left(e;1-\frac{e^2}{2}\right)$ l'equazione della retta tangente in P è:

$t_P: y-g(e)=g'(e)\cdot(x-e)\rightarrow$

$t_P: y-\left(1-\frac{e^2}{2}\right)=-\frac{e}{2}\cdot(x-e)\ \ t_P: y=-\frac{e}{2}\cdot x+1$

In Figura 4 sono rappresentati i diagrammi delle funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$ della retta tangente nel punto P ed altri elementi grafici utili per la lettura della figura.

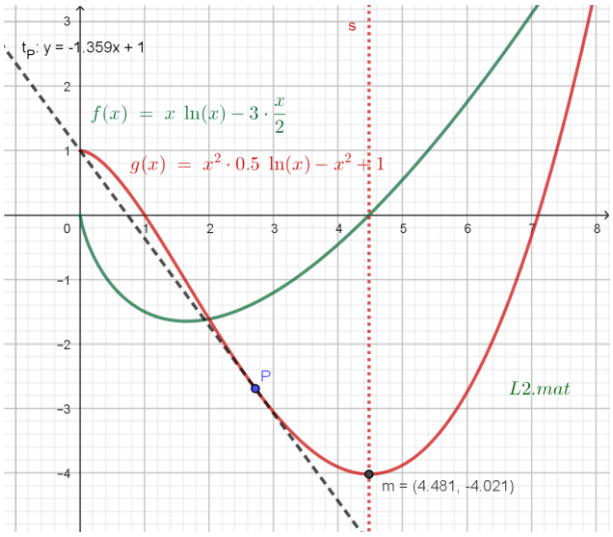

Figura 4

*** ***

Breve commento al testo del problema

La risoluzione del problema proposto non presenta particolari difficoltà nei calcoli necessari e come prova di sintesi del percorso conclusivo del Liceo Scientifico permette di saggiare le competenze acquisite dal Candidato sugli argomenti di seguito elencati.

1. Saper gestire la presenza di uno o più parametri individuando le condizioni da imporre per gli stessi affinché le curve delle quali si richiedono le equazioni cartesiane abbiano le proprietà richieste (quesiti **a** e **c**).
2. Conoscenza adeguata della funzione logaritmica e di una funzione trascendente mista prodotto di un polinomio (di primo grado) con una funzione logaritmica (quesito **a**).
3. Saper eseguire in tutte le sue parti lo studio completo di una funzione (dominio di definizione, segno e zeri, monotonia, presenza di eventuali asintoti,…) e rappresentare il relativo grafico (quesito **a**).
4. Per la risoluzione del primo quesito il Candidato deve conoscere quali condizioni devono essere soddisfatte dalla struttura analitica della funzione affinché un determinato punto del dominio sia l'ascissa di un punto di minimo assoluto (quesito **a**).

5. Sapere sotto quali condizioni i diagrammi di due diverse funzioni risultano essere tangenti in un particolare punto: utilizzo del concetto derivabilità di una funzione e del significato della derivata prima in un punto (quesito **c**).
6. Conoscere le proprietà di cui gode la funzione integrale di una funzione $y=f(x)$ di punto iniziale assegnato (quesito d).

E' appena il caso di sottolineare che il concetto di derivata prima di una funzione $y=f(x)$ in un punto x_0 del dominio di definizione e della sua proprietà di rappresentare il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma nel punto $(x_0; f(x_0))$ ricorrono per ben quattro volte nello sviluppo del problema (quesiti **a**, **b**, **c** e **d**). Sembra proprio che l'Autore del testo abbia voluto insistere su "tale imprescindibile conoscenza della proprietà della derivata prima di una funzione reale di variabile reale".

E allora, nel rispetto del diritto d'Autore, concludo che nel problema proposto ho riscontrato la presenza a tutta forza dell'utilizzo della derivata prima in un punto x_0 e del ruolo grafico della retta tangente al diagramma della stessa funzione nel punto $(x_0; f(x_0))$. Questi concetti pervadono l'intero lavoro che il Candidato che abbia affrontato il problema in esame avrà dovuto svolgere.

Luigi Lecci