I numeri interi relativi
di Antonino Giambò

1. Alessandro Padoa (1868-1937) fu un matematico veneziano. Figlio di genitori ebrei ed egli medesimo ebreo osservante, per alcuni contrattempi conseguì la laurea in Matematica con qualche anno di ritardo, nel 1895. Per lungo tempo insegnò nelle scuole secondarie e precisamente fino al 1932, allorché, conseguita alla veneranda età di 64 anni la libera docenza in Logica Matematica (1) presso l'Università di Genova, ottenne un incarico presso quella stessa Università. Dove poté insegnare solo per 4 anni, fino al 1936, per raggiunti limiti d'età. L'anno dopo morì.

Appena laureato, diventò socio della Mathesis e partecipò alle adunanze della sezione torinese di questa Associazione. Partecipò pure al Primo Congresso della Mathesis, svoltosi a Torino dal 9 al 14 settembre 1898.

Fu uno dei più stretti collaboratori di Giuseppe Peano (1858-1932) e tenne numerose conferenze in varie parti d'Italia ed anche all'Estero. Nel 1900 partecipò sia al Congresso Internazionale di Filosofia, tenutosi a Parigi dall'1 al 5 agosto, sia al Congresso Internazionale di Matematica, esso pure svoltosi a Parigi ma dal 6 al 12 agosto.

Nel Congresso di Filosofia tenne una conferenza dal titolo *Essai d'une théorie algébrique des nombres entieres précédé d'une introduction logique à una théorie déductive qualconque*, con la quale esponeva, opportunamente riveduta, la teoria assiomatica dei numeri naturali di Peano, preceduta, come dice il titolo, dalle basi logiche che la supportano ma che sono applicabili ad una qualsiasi teoria deduttiva. Dimostra anche, ed è la prima volta, l'indipendenza degli assiomi di Peano per la costruzione dei numeri naturali.

Nel Congresso di Matematica presentò un lavoro sui principi della geometria dal titolo *Un nouveau système des définitions pour la géométrie euclidienne,* tradotto poi in italiano col titolo *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria euclidea* e pubblicato sul "Periodico di Matematica" nel 1904, N° 2, pagg. 74-80. E questa non fu l'unica pubblicazione sul PdM.

Ancora nel 1900, ma sulla "Rivista di Matematica", diretta da Giuseppe Peano (1858-1932), pubblicò un articolo dal titolo *Numeri interi relativi* (RdM, vol. 7, 1900-1901, pagg. 73-84).

La produzione letteraria di Padoa è molto ricca, ma a noi interessa quest'ultimo articolo, poiché ad esso s'ispirano le considerazioni che svilupperemo in questo contributo.

Bisogna dire che, scrivendo questo articolo, Padoa aveva come obiettivo non tanto la struttura in sé dei numeri interi quanto piuttosto la dimostrazione che le proposizioni riguardanti quel sistema di numeri potevano essere trascritte in simboli ideografici mediante l'uso di pochi simboli logici e algebrici. E questo, verosimilmente, per rendere omaggio a Peano, suo maestro, ed anche alla scuola di Logica Matematica che, verso la fine dell'Ottocento, proprio attorno a Peano era sorta.

Ma questo aspetto della faccenda a noi non interessa, mentre ci interessa l'altro aspetto, vale a dire la costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi e la loro strutturazione.

Un'altra precisazione però, prima di entrare in argomento, s'impone in quanto collegata al nostro tema.

La locuzione "numeri interi relativi" fu introdotta proprio da Padoa. Prima di lui si parlava soltanto di "numeri interi". Questo si evince da una missiva che egli inviò, nel 1901, all'amico Giovanni Vailati (1863-1909), egli pure collaboratore di Peano, con il quale tenne una ricca corrispondenza (2). Ebbene, in quella missiva, che era precisamente una cartolina postale, Padoa spiega a Vailati perché aveva deciso di denominare "numeri interi relativi" quegli enti di cui si era occupato nell'articolo succitato. E chiarisce che lo fa in contrapposizione ai "numeri assoluti".

---

1 Detto per curiosità, si trattò della prima libera docenza in Logica Matematica e la Commissione giudicatrice era composta da Beppo Levi (1865-1961), Michele Cipolla (1880-1947) e Giovanni Vacca (1872-1953).

2 In realtà, Padoa inviò a Vailati una trentina di missive, fra lettere e cartoline. È presumibile che Vailati abbia risposto, ma delle missive di risposta non c'è traccia.

2. I numeri “con segno”, a differenza di molti altri concetti matematici, non sono patrimonio della Matematica degli antichi Greci. Compaiono infatti per la prima volta nella Matematica indiana e precisamente nel *Brahmasphuta Siddhānta*, l’opera più famosa del matematico Brahmagupta (VII sec. d.C.). L’opera presenta per l’appunto il primo esempio di numeri negativi, introdotti in contrasto con quelli positivi, per distinguere i debiti dai crediti. Presenta inoltre lo zero e le regole per operare con tali numeri. Ecco, in particolare cosa si legge nel *Brahmasphuta*:

Regola di moltiplicazione. Il prodotto di una quantità negativa per una positiva è negativo; di due negative è positivo; di due positive è positivo. Il prodotto di zero per una negativa o di zero per una positiva è zero; di due zeri è zero.

Si legge ancora:

Un numero positivo diviso per un numero positivo, o un numero negativo diviso per un numero negativo dà un numero positivo. Zero diviso per zero non dà nulla. Un numero positivo diviso per un numero negativo dà un numero negativo. Un numero negativo diviso per un numero positivo dà un numero negativo. Un numero positivo o negativo diviso per zero è una frazione avente per denominatore zero [Brahmagupta non dà ulteriori spiegazioni su questo caso – N.d.A.].

Altri studiosi indiani utilizzano i numeri con segno, ma di norma come espedienti per calcolare. Per esempio Bhaskara (XII sec.) sembra accettare con riserva le soluzioni negative di un’equazione di 2° grado (3).

Nella Matematica araba del IX secolo, che pure ha preso molto da quella indiana ed ha avuto un’influenza determinate su quella occidentale, i numeri con segno non hanno diritto di cittadinanza.

Lo stesso Al-Khuwarizmi (IX secolo), celebre fra l’altro per aver dato un contributo determinante allo sviluppo dell’algebra, non solo rifiutava le radici negative di un’equazione ma addirittura anche la radice nulla.

Ad ogni buon conto, quando ci sono state, sia l’introduzione dei numeri negativi sia le regole per operare con essi sono state accettate senza una spiegazione logica soddisfacente.

Nel mondo occidentale i numeri negativi fecero la loro comparsa molto tardi, nel XV secolo. Sembra che sia stato il francese Nicolas Chuquet (attivo nel XV secolo), nell’opera dal titolo *Triparty en la science des nombres*, a prendere in considerazione, per primo in Occidente, le radici negative di un’equazione e, più in generale, i numeri negativi e le operazioni con essi.

Ma, come avveniva presso gli Indiani, i numeri negativi furono usati all’inizio solo come espediente di calcolo, per cui non erano annoverati tra gli insiemi numerici. C’era chi li denominava “numeri assurdi” (Michael Stifel, 1487-1567), chi “numeri ficti” (Gerolamo Cardano, 1501-1576). Rafael Bombelli (1526-1572) rifiutò le radici negative di un’equazione, radici che chiamava “false”. Gli stessi Fermat (Pierre de Fermat, 1601-1665) e Cartesio (René Descartes, 1596-1650), i creatori della Geometria Analitica, esclusero i numeri negativi dai loro ragionamenti, tant’è che le considerazioni che facevano sulle figure studiate riguardavano esclusivamente punti del primo quadrante di quello che oggigiorno chiamiamo piano cartesiano.

Il merito di aver reso sistematica l’accettazione dei numeri negativi, come numeri a tutti gli effetti, fu di Isaac Newton (1642-1727), attraverso una serie di lezioni da lui tenute all’Università di Cambridge nel decennio 1673-1683 e pubblicate nel 1707 in un volume dal titolo *Arithmetica universalis*.

Un contemporaneo di Newton, il suo connazionale John Wallis (1616-1703), colui che introdusse il simbolo ∞ per indicare l’infinito, è ritenuto l’ideatore della *retta numerica*, con numeri positivi e negativi.

Questa accettazione, tuttavia, era ben lontana dal possedere una base logica che spiegasse la costruzione dei numeri con segno e le regole per operare con essi.

Soprattutto lasciava perplessi il fatto che “meno per meno desse più” e non si riusciva a darne una spiegazione seria.

---

[3] A titolo di cronaca, dopo Bhaskara la matematica indiana non registra studiosi di valore per lunghissimo tempo. Bisogna giungere ai primi anni del Novecento per trovarne uno e si tratta di un vero e proprio prodigio matematico: Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Dopo di lui, però, di matematici indiani di valore se ne contano parecchi.

Perfino il grande Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783) si cimentò in una dimostrazione, per nulla convincente, del fatto che $(-1)(-1)$ dovesse essere uguale a +1. Secondo il suo ragionamento, quel prodotto può essere solamente +1 o -1. Ma non può essere -1 dal momento che questo è il risultato di $(+1)(-1)$. Di conseguenza deve essere +1.

Ebbene, la giustificazione di tutto ciò fu opera di Alessandro Padoa. E noi ce ne occupiamo in questo articolo.

Ad onor del vero, la regola dei segni della moltiplicazione degli interi, così come altre proprietà di questi numeri, era possibile spiegarle in base al cosiddetto *principio di permanenza delle proprietà formali*.

Principio che, anticipato nel 1834 dal matematico inglese George Peacock (1791-1858) e ribadito nel 1845 nell'opera *Symbolical Algebra* (*Algebra simbolica*), aveva trovato una esplicita formulazione e varie applicazioni nell'opera *Theorie der komplexen Zahlensysteme* (*Teoria dei sistemi di numeri complessi*, 1867) del matematico tedesco Hermann Hankel (1839-1873).

Di solito, nell'insegnamento elementare, è esattamente a questo principio che si fa ricorso.

Ma a noi interessa il lavoro di Padoa ed è su questo che concentriamo la nostra attenzione.

Passiamo dunque alla costruzione, razionalmente rigorosa, degli interi relativi e alla loro strutturazione. Costruzione indipendente da qualsiasi aspetto intuitivo o pratico che giustifichi tali numeri (debiti / crediti, altezza sopra / sotto il livello del mare, temperature al di sopra / al di sotto dello 0, …), sulla base delle idee di Padoa, ma con più di un supporto che ci viene dalla teoria degli insiemi.

S'intende che assumiamo per dati i numeri naturali e le regole per operare con essi. Indichiamo con $\mathbb{N}$ il loro insieme.

3. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}^2$, vale a dire l'insieme delle coppie ordinate (x, y), dove x, y sono numeri naturali qualsiasi, e prendiamo due qualsiasi elementi di quest'insieme: (a, b) e (c, d).

Si dice che (a, b) è ***equidifferente*** a (c, d) se e solo se risulta $a+d=b+c$. Si dice anche che (a, b) è ***equivalente per differenza*** a (c, d). Si scrive: $(a, b)\cong(c, d)$.

Nell'insieme $\mathbb{N}^2$ la relazione di equidifferenza è una relazione di equivalenza poiché, come si dimostra (vedere riquadro), essa è riflessiva, simmetrica [4] e transitiva.

Si dimostra che la relazione di equidifferenza, definita in $\mathbb{N}^2$, è una *relazione di equivalenza*.

- La relazione "≅" è *riflessiva* : $(a, b)\cong(a, b)$, qualunque sia la coppia ordinata (a, b), presa in $\mathbb{N}^2$.

Di fatto, siccome $a+b=b+a$ allora, per definizione $(a, b)\cong(a, b)$.

- La relazione "≅" è *simmetrica* : $(a, b)\cong(c, d) \Longrightarrow (c, d)\cong(a, b)$, qualunque siano le coppie coinvolte, prese ovviamente in $\mathbb{N}^2$.

Infatti: $(a, b)\cong(c, d) \Longrightarrow a+d=b+c \Longrightarrow b+c=a+d \Longrightarrow c+b=d+a \Longrightarrow (c, d)\cong(a, b)$.

- La relazione "≅" è *transitiva* : $(a, b)\cong(c, d)$ et $(c, d)\cong(e, f) \Longrightarrow (a, b)\cong(e, f)$, qualunque siano le coppie coinvolte, prese in $\mathbb{N}^2$.

Infatti, per le note proprietà dei numeri naturali (che nei due precedenti ragionamenti sono state sottintese):

$$(a, b)\cong(c, d) \text{ et } (c, d)\cong(e, f) \Longrightarrow (a+d=b+c) \text{ et } (c+f=d+e) \Longrightarrow (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a+f)+(c+d)=(b+e)+(c+d) \Longrightarrow (a, b)\cong(e, f) .$$

La relazione opera pertanto una partizione dell'insieme $\mathbb{N}^2$ in classi di equivalenza. Ognuna di queste classi, vale a dire ogni insieme di coppie equidifferenti di $\mathbb{N}^2$, si denomina **numero intero relativo** o semplicemente **numero intero**. Naturalmente ogni coppia ordinata (a, b) individua uno ed un solo numero intero, il quale è

4 Il fatto che valga la proprietà simmetrica autorizza a parlare di *coppie equidifferenti* ogni volta che una coppia ordinata è equidifferente ad un'altra coppia ordinata.

individuato da ogni altra coppia equidifferente ad (a, b). Ma la coppia non si identifica col numero. Indichiamo provvisoriamente il numero intero relativo individuato dalla coppia ordinata (a, b) con la scrittura **< a, b >**.

Così, per esempio:

$$<0, 0> = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), \dots\},$$
$$<1, 0> = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), \dots\},$$
$$<0, 1> = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \dots\}.$$

Una rappresentazione grafica dell'insieme $\mathbb{N}^2$ (figura 1) mostra che le coppie ordinate che appartengono alla stessa classe di equivalenza, ovvero allo stesso numero intero relativo, sono allineate.

Si può costatare che, fra tutte le coppie ordinate equidifferenti fra loro, ce n'è una avente nulla almeno una componente (in realtà, una sola coppia ha nulle entrambe le componenti). Questa coppia si denomina *coppia ridotta*. Di solito, ma non sempre, la si preferisce per rappresentare il numero che si prende in considerazione e il numero stesso si dice *scritto in forma ridotta*. Nella figura 1 è stata utilizzata per l'appunto la scrittura dei numeri in forma ridotta.

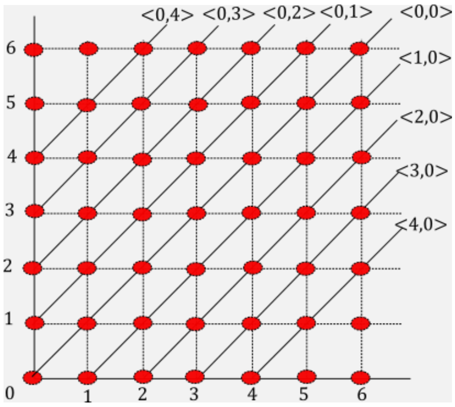

figura 1

4. Considerato un qualsiasi numero intero <a, b>, si presentano tre possibilità: a=b, a>b, b>a.

- Se a=b la forma ridotta del numero intero è <0, 0>: chiamiamo ***zero*** questo numero.
- Se a>b la forma ridotta del numero intero è <r, 0>, dove r=a−b: un tale numero si dice ***positivo***.
- Se b>a la forma ridotta del numero intero è <0, r>, dove r=b−a: un tale numero si dice ***negativo***.

Conveniamo di indicare con $+r$ e $-r$ rispettivamente i numeri interi <r, 0> e <0, r>, quando r≠0, mentre, quando r=0, indichiamo con 0 il numero <0, 0> e assumiamo per convenzione che sia $+0 = -0 = 0$.

I numeri interi $0, +r, -r$ si dicono scritti in *forma canonica*.

Indichiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi.

Il numero naturale non nullo r si denomina *valore assoluto* sia del numero $+r$ sia di $-r$ e si scrive:

$$|+r| = |-r| = r.$$

Due numeri interi entrambi positivi o entrambi negativi si dicono *concordi*. Se invece uno è positivo e l'altro è negativo si dicono *discordi*.

In particolare, due numeri discordi che abbiano lo stesso valore assoluto si dicono *opposti*.

Attenzione! Pur avendo definito nel modo suddetto i numeri positivi e i numeri negativi, in realtà non abbiamo ancora stabilito alcun confronto con lo zero, né dei numeri fra loro.

Lo facciamo adesso.

- Incominciamo con lo stabilire quando due numeri interi devono intendersi uguali.

Ebbene, considerati due numeri interi r=<a, b> e r'=<a', b'>, si dice che r è ***uguale*** a r', e si scrive r=r', se e solo se le coppie ordinate (a, b) e (a', b') sono equidifferenti, vale a dire se a+b'=b+a'.

Come la relazione di equidifferenza, definita nell'insieme $\mathbb{N}^2$, anche la relazione di uguaglianza, definita in $\mathbb{Z}$, è riflessiva, simmetrica e transitiva (vedere riquadro).

Si dimostra che nell'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione "è uguale" è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- La relazione "=" è *riflessiva* : x=x, qualunque sia il numero x preso in $\mathbb{Z}$.

Di fatto, se è (a, b) una qualsiasi coppia ordinata di numeri naturali che genera x, per la proprietà riflessiva dell'equidifferenza in $\mathbb{N}^2$ si ha: $(a, b)\cong(a, b)$. Di conseguenza: x=x.

- La relazione "=" è *simmetrica* : x=y ⟹ y=x, comunque siano presi x, y in $\mathbb{Z}$.

Di fatto, se è x = <a, b> e y = <c, d>, per la proprietà simmetrica dell'equidifferenza in $\mathbb{N}^2$ risulta che $(a, b)\cong(c, d) \Longrightarrow (c, d)\cong(a, b)$. Di conseguenza: x=y ⟹ y=x.

- La relazione "=" è *transitiva* : x=y et y=z ⟹ x=z, comunque siano presi x, y, z in $\mathbb{Z}$.

Di fatto, posto x = <a, b>, y = <c, d>, z = <e, f>, per la proprietà transitiva dell'equidifferenza in $\mathbb{N}^2$ risulta che $(a, b)\cong(c, d)$ et $(c, d)\cong(e, f) \Longrightarrow (a, b)\cong(e, f)$. Di conseguenza: x=y et y=z ⟹ x=z.

- Riprendiamo adesso i due numeri interi r=<a, b> e r'=<a', b'>. Si dice che r è ***maggiore*** di r', e si scrive r>r', se e solo se risulta a+b'>b+a'. Si dice pure che r' è ***minore*** di r, e si scrive r'<r.

Consideriamo finalmente i numeri interi, scritti in forma canonica: $+r = <r, 0>$, $-r = <0, r>$, e confrontiamoli con lo zero: $0 = < 0, 0 >$. Si spiega agevolmente, in base alla definizione, che +r>0 e −r<0 e inoltre che +r>−r. Pertanto, data l'arbitrarietà con cui sono stato preso il numero naturale r :

Ogni numero positivo è maggiore di 0 e ogni numero negativo è minore di 0, e inoltre ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo.

Si dimostra (vedere riquadro) che la relazione "è maggiore", definita nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, è transitiva e antiriflessiva.

Se ne desume che *l'insieme $\mathbb{Z}$ è ordinato in senso stretto rispetto alla relazione "è maggiore"*.

Si dimostra che nell'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione "è maggiore" è transitiva e antiriflessiva.

- La relazione ">" è *transitiva* : x>y e y>z ⟹ x>z, comunque siano presi in $\mathbb{Z}$ i numeri x, y, z.

Di fatto, posto x = <a, b>, y = <c, d>, z = <e, f>, siccome x>y allora a+d>b+c, e siccome y>z allora c+f>d+e. Risulta pertanto: (a+d)+(c+f)>(b+c)+(d+e), ossia, per le note proprietà dei numeri naturali: (a+f)+(c+d)>(b+e)+(c+d) e dunque: (a+f)>(b+e). Di conseguenza: x>y e y>z ⟹ x>z.

- La relazione ">" è *antiriflessiva* : x ≯ x, qualunque sia il numero x preso in $\mathbb{Z}$.

Di fatto, posto x = (a, b), per la proprietà antiriflessiva della relazione "è maggiore" nell'insieme dei numeri naturali, si ha: a+b ≯ b+a. Di conseguenza: x ≯ x.

L'ordine appena evidenziato permette di rappresentare l'insieme $\mathbb{Z}$ su una retta graduata. A questo riguardo si fissano, su una determinata retta w (figura 2), due punti distinti O, detto *origine*, e U, detto *punto unità*. Si dice che la coppia ordinata (O, U) costituisce un *riferimento cartesiano* sulla retta, la quale è denominata *retta numerica* ma anche *retta cartesiana*.

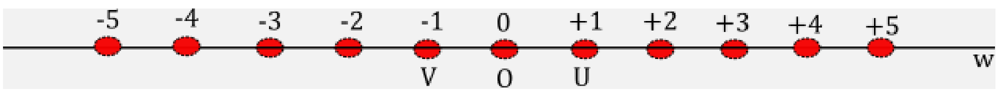

figura 2

Considerato adesso un qualsiasi numero intero z, associamo ad esso un punto di w determinato nel modo seguente:

- se z=0, si associa ad esso il punto origine O;
- se z =1, si associa ad esso il punto unità U;
- se z è un numero diverso da 0 e da 1, si associa ad esso il punto P, dalla stessa parte di U rispetto ad O se z>0 e da parte opposta se z<0, in modo che sia $OP=|z|\ OU$. In particolare, se z=−1, P coincide con il punto V simmetrico di U rispetto ad O.

5. Al fine di strutturare l'insieme $\mathbb{Z}$ con le operazioni di "addizione" e "moltiplicazione", è fondamentale una premessa. Precisamente, indicato con $\mathbb{Z}^+$ l'insieme dei numeri interi NON negativi, osserviamo in primo luogo che, comunque vengano presi i numeri $+a=<a, 0>$ e $+b=<b, 0>$, i numeri $<a+b, 0>$ e $<a\cdot b, 0>$ sono chiaramente essi pure elementi di $\mathbb{Z}^+$, dal momento che i numeri $a+b$ e $a\cdot b$ sono evidentemente numeri naturali. Introduciamo quindi in $\mathbb{Z}^+$ due operazioni, che denominiamo "più cerchiato" e "punto cerchiato" (simboli rispettivamente $\oplus$ e $\odot$) tali che risulti:

$$<a, 0> \oplus <b, 0> = <a+b, 0>\,, \quad <a, 0> \odot <b, 0> = <a\cdot b, 0>\,,$$

vale a dire:

$$(+a) \oplus (+b) = +(a+b)\,, \ \ (+a) \odot (+b) = +(a\cdot b)\,.$$

Consideriamo adesso le due strutture algebriche $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$. Si dimostra che sono in isomorfismo aritmetico [5]. Di fatto:

- è definita una funzione biiettiva f di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}^+$: basta associare ad ogni r preso in $\mathbb{N}$ l'intero relativo $+r$, appartenente ovviamente a $\mathbb{Z}^+$, va a dire che si pone $+r=f(r)$, qualunque sia il naturale r ;
- qualunque siano i numeri naturali r, s, risulta:

$$f(r) \oplus f(s) = (+r) \oplus (+s) = +(r+s) = f(r+s), \quad f(r) \odot f(s) = (+r) \odot (+s) = +(r\cdot s) = f(r\cdot s)\,.$$

L'isomorfismo aritmetico fra le due strutture rende legittima l'identificazione dei due insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^+$, anche se essi sono concettualmente distinti. Scriveremo perciò, ogni volta che lo riterremo opportuno, r invece di $+r$, ponendo appunto $+r=r$, qualunque sia il numero naturale r. In questo senso possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, anche se, in realtà, questo è vero a meno di un isomorfismo aritmetico. Inoltre, per analogia con le corrispondenti operazioni in $\mathbb{N}$, indicheremo con "+" e "·" le due operazioni "$\oplus$" e "$\odot$" rispettivamente.

6. Abbiamo a questo punto tutti gli elementi per introdurre in $\mathbb{Z}$ le due operazioni "addizione" e "moltiplicazione".

Consideriamo a questo riguardo, due qualsiasi numeri interi non negativi, rappresentati da coppie non ridotte, in particolare $<\alpha, \beta>, <\gamma, \delta>$. Esse possono essere trasformate facilmente nella seguente forma ridotta: $<\alpha-\beta, 0>, <\gamma-\delta, 0>$.

Questo perché, per ogni coppia ordinata (a, b), con $a\geq b$, e per ogni numero naturale $m\leq b$, si ha $(a, b)\cong(a-m, b-m)$. Basta infatti costatare che è $a+(b-m)=b+(a-m)$.

Cosicché risulta:

$$<\alpha,\beta> \; = \; <\alpha-\beta,\ \beta-\beta> \; = \; <\alpha-\beta,\ 0>\,, \;\; <\gamma,\delta> \; = \; <\gamma-\delta,\ \delta-\delta> \; = \; <\gamma-\delta,\ 0>\,.$$

- Ci occupiamo per prima cosa dell'**addizione**.

Dopo le considerazioni precedenti, si ha:

$$<\alpha, \beta> + <\gamma, \delta> = <\alpha-\beta, 0> + <\gamma-\delta, 0> = <(\alpha-\beta) + (\gamma-\delta), 0>\,.$$

Osserviamo adesso che, quali che siano i numeri naturali a, b, c, d, purché $a\geq b$ e $c\geq d$, risulta:

$$(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)\,.$$

Per provarlo basta dimostrare che si ha:

$$(b+d) + [(a-b) + (c-d)] = a + c\,.$$

Di fatto, in virtù di proprietà delle operazioni in $\mathbb{N}$:

$$(b+d) + [(a-b) + (c-d)] = [b + (a-b)] + [d + (c-d)] = a + c\,.$$

Ritornando dunque alla relazione considerata all'inizio, si ha:

(1) $$<\alpha,\beta> + <\gamma,\delta> = <\alpha+\gamma,\ \beta+\delta>\,.$$

---

5 Su questo concetto si può vedere, se occorre, il mio articolo *Isomorfismo aritmetico*, pubblicato su questa medesima rubrica il 25 agosto 2020.

Questa relazione, che in sostanza non è altro che un modo diverso di rappresentare l'addizione in $\mathbb{Z}^+$, può essere assunta come definizione di addizione in $\mathbb{Z}$. Si può dimostrare infatti che essa è *ben definita*, vale a dire che, se si prendono altri numeri interi, $<\alpha', \beta'> = <\alpha, \beta>$ e $<\gamma', \delta'> = <\gamma, \delta>$, risulta ancora:

$$<\alpha', \beta'> + <\gamma', \delta'> = <\alpha'+\gamma', \beta'+\delta'> .$$

Si ottengono, come applicazione della (1), le seguenti relazioni, che esprimono, le ***regole per l'addizione dei numeri interi relativi***, assegnati in forma canonica:

REGOLE PER L'ADDIZIONE DEI NUMERI INTERI RELATIVI.

Quali che siano i numeri naturali a, b, si ha:

$$(+a) + (+b) = < a, 0 > + < b, 0 > = < a + b, 0 > = +(a + b) ,$$

$$(-a) + (-b) = < 0, a > + < 0, b > = < 0, a + b > = -(a + b) ,$$

$$(+a) + (-b) = < a, 0 > + < 0, b > = < a, b > = \begin{cases} < a - b, 0 > = +(a - b) , & \text{se } a > b \\ < 0, b - a > = -(b - a), & \text{se } b > a \end{cases}$$

$$(-a) + (+b) = < 0, a > + < b, 0 > = < b, a > = \begin{cases} < b - a, 0 > = +(b - a) , & \text{se } b > a \\ < 0, a - b > = -(a - b), & \text{se } a > b \end{cases}$$

- Passiamo alla **moltiplicazione**, tenendo comunque presenti le considerazioni esposte all'inizio di questo paragrafo.

Si ha:

$$<\alpha, \beta> \cdot <\gamma, \delta> = <\alpha-\beta, 0> \cdot <\gamma-\delta, 0> = <(\alpha-\beta) \cdot (\gamma-\delta), 0 > .$$

Osserviamo adesso che, quali che siano i numeri naturali a, b, c, d, purché $a \geq b$ e $c \geq d$, si può dimostrare che, rimanendo nell'insieme dei naturali, risulta:

$$(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc) .$$

Si ha pertanto:

(2) $$< \alpha, \beta > \cdot < \gamma, \delta > = < \alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma > .$$

Come prima, questa relazione, che in effetti è un modo diverso di rappresentare la moltiplicazione in $\mathbb{Z}^+$, può essere assunta come definizione di moltiplicazione in $\mathbb{Z}$. Si può dimostrare infatti che essa è *ben definita*, vale a dire che non dipende dalle coppie prese in esame.

Si ottengono, in conseguenza di essa, le seguenti relazioni, che esprimono le ***regole della moltiplicazione dei numeri interi relativi***, assegnati in forma canonica, sistemando così una volta per tutte e in modo definitivo la faccenda che "memo per meno dà più":

REGOLE PER LA MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI INTERI RELATIVI.

Quali che siano i numeri naturali a, b, si ha:

$$(+a) \cdot (+b) = < a, 0 > \cdot < b, 0 > = < a\,b, 0 > = +(a\,b) ,$$

$$(-a) \cdot (-b) = < 0, a > \cdot < 0, b > = < a\,b, 0 > = +(a\,b) ,$$

$$(+a) \cdot (-b) = < a, 0 > \cdot < 0, b > = < 0, a\,b > = -(a\,b) ,$$

$$(-a) \cdot (+b) = < 0, a > \cdot < b, 0 > = < 0, a\,b > = -(a\,b) .$$

7. Una volta che siano state definite le operazioni di addizione e moltiplicazione e che sia stato stabilito che sono operazioni interne all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, si possono studiare le strutture algebriche $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Si dimostra precisamente, utilizzando le coppie ordinate, che la struttura $(\mathbb{Z}, +)$ è un *gruppo commutativo*, la struttura $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un *monoide unitario commutativo*, la struttura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un *anello unitario commutativo*.

A titolo di esempio, ci soffermiamo su alcune delle proprietà che caratterizzano le strutture e che supponiamo conosciute da chi eventualmente leggesse queste note [6]. Le altre proprietà si possono dimostrare con lo stesso metodo, comprese le leggi di monotonia e di cancellazione, sulle quali non ci soffermiamo.

- **Esiste in $\mathbb{Z}$ l'elemento neutro rispetto all'operazione "+".**

DIMOSTRAZIONE.

Preso un qualsiasi numero intero relativo $< a, b >$, osserviamo che si ha:

$$< a,b > + < 0,0 > \; = \; < 0,0 > + < a,b > \; = \; < a,b >.$$

Il che prova che il numero $< 0, 0 > = 0$ è l'elemento neutro cercato.

- **Ogni numero intero relativo ammette il simmetrico rispetto all'operazione "+".**

DIMOSTRAZIONE.

Preso un qualsiasi intero relativo $< a, b >$, si tratta di far vedere che esiste in $\mathbb{Z}$ l'elemento $< x, y >$ tale che:

$$< a + b > + < x,y > \; = \; < x,y > +< a,b > \; = \; < 0,0 >.$$

Per la commutatività dell'operazione, che pure si può dimostrare, basta provare una parte della relazione precedente.

Allora, costatato che <a,b>+<x,y> = <a+x, b+y>, deve risultare: <a+x, b+y> = <0,0>. Vale a dire:

$$a + x = 0, \;\; b + y = 0 \,.$$

Da qui, con semplici considerazioni, che tuttavia coinvolgono proprietà che pure si possono dimostrare, come la legge di regolarità dell'addizione, segue:

$$x = -a \,, \;\; y = -b \,.$$

Cosicché il simmetrico di $< a, b >$ rispetto a "+" è il numero intero relativo <–a, –b>. Questo numero è esattamente l'*opposto* di $< a, b >$.

D'altro canto, supponendo $a > b$, possiamo scrivere:

$$< a,b > \; = \; < a - b, 0 > \; = \; +r \quad \text{e} \quad < -a, -b > \; = \; < 0, a - b > \; = \; -r \,.$$

Se, invece, $a < b$, possiamo scrivere:

$$< a,b > \; = \; < 0, b - a > \; = \; -r \quad \text{e} \quad < -a, -b > \; = \; < b - a, 0 > \; = \; +r \,.$$

In ogni caso, concludiamo che i numeri interi relativi $+r$ e $-r$ sono l'uno opposto dell'altro.

Osservazione.

L'esistenza dell'opposto di un qualsiasi numero intero relativo permette di definire l'operazione di "sottrazione" in $\mathbb{Z}$. Precisamente, vale la seguente relazione, qualunque siano i numeri interi relativi r, s:

$$r - s = r + (-s) \,,$$

la quale fornisce per l'appunto la regola per eseguire la ***sottrazione*** di un intero da un altro.

- **Esiste in $\mathbb{Z}$ l'elemento neutro rispetto all'operazione "·".**

DIMOSTRAZIONE.

Preso un qualsiasi numero intero relativo $< a, b >$, osserviamo che si ha:

$$< a,b > \cdot < 1, 0 > \; = \; < 0, 1 > \cdot < a,b > \; = \; < a,b >.$$

Di fatto, fermandoci solamente su una parte della relazione, data la commutatività dell'operazione, che pure si può dimostrare, si ha:

$$< a,b > \cdot < 1, 0 > \; = \; < a \cdot 1 + b \cdot 0, \;\; a \cdot 0 + b \cdot 1 > \; = \; < a,b > .$$

Il che prova che il numero $< 1,0 > = 1$ è l'elemento neutro cercato.

---

[6] Per ogni evenienza, se occorre, si può vedere l'articolo *Strutture algebriche rare*, pubblicato su questa medesima rubrica il 22 agosto 2022.

- **L'elemento neutro rispetto all'operazione "+" (ossia 0) è *elemento nullifico* rispetto all'operazione "·".**

Vale a dire che, comunque sia preso l'intero relativo r, risulta:

$$\mathrm{r} \cdot 0 = 0 \cdot \mathrm{r} = 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE.
Di nuovo, per la commutatività dell'operazione, basta dimostrare che $\mathrm{r}\cdot 0=0$.
Posto allora r = <a,b> e ricordato che 0 = <0,0>, risulta:

$$\mathrm{r} \cdot 0 \;=\; <\mathrm{a},\mathrm{b}> \cdot <0{,}0> \;=\; <\mathrm{a} \cdot 0 + \mathrm{b} \cdot 0,\;\; \mathrm{a} \cdot 0 + \mathrm{b} \cdot 0> \;=\; <0{,}0> \;=\; 0\,.$$

Come si voleva dimostrare.

- **La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione**.

Vale a dire che, comunque siano presi gli interi relativi p, q, r, risulta:

$$(\mathrm{p}+\mathrm{q}) \cdot \mathrm{r} = \mathrm{p\,q} + \mathrm{r\,q} \quad \text{e} \quad \mathrm{r} \cdot (\mathrm{p}+\mathrm{q}) = \mathrm{r\,p} + \mathrm{r\,q}\,.$$

DIMOSTRAZIONE.
Al solito, per la commutatività delle operazioni, basta dimostrare la prima parte.
Poniamo allora:

$$\mathrm{p} = <\mathrm{a},\mathrm{b}>\,,\;\; \mathrm{q} = <\mathrm{c},\mathrm{d}>\,,\;\; \mathrm{r} = <\mathrm{e},\mathrm{f}).$$

Occorre dimostrare che risulta:

$$(<\mathrm{a},\mathrm{b}> + <\mathrm{c},\mathrm{d}>) \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;=\; <\mathrm{a},\mathrm{b}> \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;+ <\mathrm{c},\mathrm{d}> \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}>\,.$$

Conviene sviluppare entrambi i membri e costatare che danno risultati uguali.
Si ha di fatto:

$$\begin{aligned}
&(<\mathrm{a},\mathrm{b}> + <\mathrm{c},\mathrm{d}>) \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;=\; <\mathrm{a}+\mathrm{c},\;\; \mathrm{b}+\mathrm{d}> \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;=\\
&\qquad =\; <(\mathrm{a}+\mathrm{c}) \cdot \mathrm{e} + (\mathrm{b}+\mathrm{d}) \cdot \mathrm{f},\;\; (\mathrm{a}+\mathrm{c}) \cdot \mathrm{f} + (\mathrm{b}+\mathrm{d}) \cdot \mathrm{e}> =\\
&\qquad\qquad = <\mathrm{ae}+\mathrm{ce}+\mathrm{bf}+\mathrm{df},\;\; \mathrm{af}+\mathrm{cf}+\mathrm{be}+\mathrm{de}>;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&<\mathrm{a},\mathrm{b}> \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;+ <\mathrm{c},\mathrm{d}> \cdot <\mathrm{e},\mathrm{f}> \;=\\
&\qquad =\; <(\mathrm{ae}+\mathrm{bf},\mathrm{af}+\mathrm{be}) + (\mathrm{ce}+\mathrm{df},\mathrm{cf}+\mathrm{de})> \;=\\
&\qquad\qquad =\; <\mathrm{ae}+\mathrm{bf}+\mathrm{ce}+\mathrm{df},\;\; \mathrm{af}+\mathrm{be}+\mathrm{cf}+\mathrm{de}>.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.
[2] Antonino Giambò, *La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, SEI, 1988.
[3] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[4] Richard Spreckelmeyer, *I numeri interi*, Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1967.
[5] Friedrich Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1971.