I numeri naturali

di Antonino Giambò

1. Nel precedente articolo (*I numeri interi relativi*) ho supposto per dati l'insieme dei numeri naturali e le regole per operare con essi. In questo articolo mi propongo di dire qualcosa di più su questo argomento.

L'idea di numero (di *numero naturale*) è molto antica e precede addirittura la nascita della civiltà [1], poiché risale certamente almeno a 30.000 anni fa. Infatti è stato rinvenuto in Moravia (oggigiorno parte della Repubblica Ceca) un osso di una zampa di lupo, risalente a quel periodo, che presenta 55 intaccature disposte in due serie: la prima comprende 25 intaccature, disposte a loro volta a gruppetti di 5; la seconda comprende 30 intaccature, esse pure disposte a gruppetti di 5. Si tratta chiaramente di una specie di registratore dei numeri molto grossolana ma che evidenzia come si facesse strada un sistema di numerazione a base 5.

Ossa di animali con intaccature regolarmente raggruppate sono stati rinvenuti pure in Libano e risalgono a circa 15.000 anni fa.

Non siamo ad una forma di Aritmetica vera e propria per due motivi almeno.

- Anzitutto è appena abbozzato il concetto di numero. Nelle popolazioni primitive dovevano essere usuali espressioni del tipo "una coppia di uccelli", "un paio di animali", ma senza aver chiaro che si trattasse di riferimenti concreti del concetto astratto "due". Afferma B. Russell [2]:

Devono essere state necessarie molte epoche storiche per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni erano entrambi espressioni del numero 2.

- In secondo luogo non sono usati simboli per rappresentare i numeri e operare con essi.

Ora, sulla data di nascita del concetto di numero, di una rappresentazione grafica e simbolica dei numeri e di regole e procedimenti per operare con essi non si hanno notizie precise e sono possibili solo congetture. Quello che possiamo affermare con certezza, perché documentato da reperti archeologici [3], è che le civiltà egizia e babilonese del periodo intorno al 2000 a.C. applicavano una forma di Aritmetica abbastanza evoluta.

Gli *Egizi* si servivano di *un sistema di numerazione decimale additivo* e avevano un segno, in carattere geroglifico, per ognuna delle prime 7 potenze di 10:

1 10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000

I *Babilonesi* si servivano invece di *un sistema di numerazione posizionale sessagesimale*, cioè in base 60, che utilizzava due soli caratteri cuneiformi, rispettivamente per i numeri 1 e 10. Per scrivere i numeri da 1 a 59 il sistema era additivo, come presso gli Egizi. I numeri più grandi, però, venivano scritti in base al sistema posizionale sessagesimale, come facciamo noi col nostro sistema posizionale decimale, cioè attribuendo ai simboli usati valori diversi secondo la posizione che occupano nel numerale che rappresenta il numero. C'era tuttavia qualche problema con lo "zero".

Riguardo ai sistemi di numerazione, le cose non migliorarono con i *Greci*. Tutt'altro. Essi, infatti, in questo settore, non segnarono progressi rispetto alla civiltà egizia e addirittura fecero registrare un regresso rispetto a quella babilonese.

Neppure i *Romani* fecero registrare progressi nel campo dell'Aritmetica. Il sistema di numerazione da loro usato era basato sui seguenti simboli:

I V X L C D M

---

[1] La nascita della civiltà si fa coincidere con la trasformazione dell'uomo da "predatore" – cioè cacciatore, pescatore, consumatore in genere dei prodotti della natura – a "produttore". È l'inizio del cosiddetto *periodo neolitico* o della pietra levigata (10.000-15.000 anni fa) e segue il *periodo paleolitico* o della pietra scheggiata.

[2] Bertrand Russell, *Introduzione alla Filosofia Matematica*, traduzione di Luca Pavolini, Milano, Longanesi & C., quarta edizione, 1963, pag. 16.

[3] Questi reperti sono soprattutto:
- le **iscrizioni** su tombe e monumenti egizi risalenti al 3000 a.C.,
- il **Papiro di Rhind** (circa 1650 a.C.) e il **Papiro di Mosca** (circa 1890 a.C.), che testimoniano delle conoscenze della civiltà egizia in campo matematico;
- le **tavolette di argilla** relative alla civiltà babilonese.

rispettivamente per i numeri:

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 50 \quad 100 \quad 500 \quad 1000.$$

Gli altri numeri erano scritti seguendo alcune precise regole.

Questo sistema di numerazione, diffuso in tutto l'Occidente, fu utilizzato praticamente fino al XV secolo.

Bisogna precisare, però, che nell'area d'influenza greca comparve, a partire dal III sec. d.C., un sistema di scrittura dei numeri, il cui uso potrebbe risalire a tempi più remoti. È il sistema di numerazione usato nei manuali pervenutici di Archimede, Tolomeo, Diofanto e altri scienziati e, in base a prove archeologiche, veniva insegnato nelle scuole. È detto sistema *ionico* o *alfabetico*. È un sistema additivo e utilizza 27 simboli per indicare i numeri seguenti:

$$1, 2, \ldots, 9, 10, 20, \ldots, 90, 100, 200, \ldots, 900.$$

Questi simboli sono le 24 lettere dell'alfabeto greco dell'età classica e 3 lettere di un alfabeto più antico.

Questo sistema restò in uso oltre 1.500 anni e fu adoperato, oltre che dagli scienziati, anche dai mercanti.

2. Il sistema di numerazione posizionale decimale, dal quale deriva il nostro sistema di numerazione, compare intorno al VII secolo d.C. in India, ma non si esclude che sia più antico.

Bisogna dire che anche la Matematica dell'antica Cina si serviva di un sistema di numerazione posizionale decimale. Il testo cinese più antico risale al periodo della dinastia Han (206 a.C. – 220 d.C.) ed è intitolato: *Chiu ch'ang Suan-shu* (*Nove Libri sull'Arte della Matematica*). Si tratta di una raccolta di problemi con regole generali per la loro risoluzione [(4)].

Ad ogni modo, il sistema a noi pervenuto è quello che gli *Arabi* hanno acquisito dagli *Indiani* e per questo è denominato *sistema di numerazione indo-arabo*.

Il merito principale dell'introduzione del sistema di numerazione indo-arabo in Occidente va attribuito soprattutto a Leonardo Fibonacci (o Leonardo Pisano, XII-XIII sec.). Egli, durante i suoi numerosi viaggi, effettuati anche in Oriente, in qualità di mercante, apprese e assimilò la Matematica degli Arabi. Elaborò le conoscenze acquisite in maniera personale e non priva di originalità in alcune opere, tra cui il *Liber abaci*, completato nel 1202: l'opera è un trattato di Aritmetica e Algebra e, nello stesso tempo, una sorta di manuale per i commercianti; comprende per l'appunto, fra le molte cose significative, una descrizione accurata del sistema di numerazione indo-arabo e fornisce le regole per eseguire le operazioni aritmetiche.

Il *Liber abaci* svolge un ruolo importante per la divulgazione di detto sistema in Europa [(5)].

Occorre precisare, tuttavia, che l'introduzione del sistema indo-arabo non trovò all'inizio favorevole accoglienza nel pubblico, abituato al sistema di numerazione romano; inoltre, l'uso di nuovi simboli e regole rendeva difficile la lettura dei libri contabili dei mercanti, che invece adottarono subito il nuovo sistema, e si temevano imbrogli. Ci volle perciò molto tempo prima che il nuovo sistema fosse accettato su larga scala.

Alla divulgazione contribuirono due altre opere, meno significative di quelle di Fibonacci ma a quell'epoca più popolari forse proprio perché più elementari: il *Carmen de algorismo* del francese Alexandre di Villedieu (1175-1240), monaco francescano, e l'*Algorismus vulgaris* di Giovanni di Halifax, matematico e astronomo scozzese, vissuto nella prima metà del XIII secolo, noto anche come Sacrobosco.

L'uso delle cifre indo-arabe si può dire che fu definitivamente adottato a partire dal 1494, anno in cui comparve una delle prime opere di Matematica pubblicata a mezzo stampa: la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* del frate francescano Luca Pacioli (1445 – ca. 1515). Si tratta di un volume ponderoso, scritto in volgare, che contiene tutte le conoscenze dell'epoca in campo aritmetico, algebrico e geometrico. La notazione aritmetica usata da Pacioli non è molto diversa dalla nostra, ma ancora parecchia

---

4 Chi volesse saperne di più sulla matematica dell'antica Cina può consultare la tesi di laurea di Samantha Galli (relatore Salvatore Coen) dal titolo appunto *Un approccio alla Matematica dell'antica Cina*. È reperibile in Internet.

5 Per dovere di cronaca, bisogna segnalare che assieme al *Liber abaci*, contribuì a diffondere in Occidente il sistema di numerazione indo-arabo una traduzione latina del XII secolo di un'opera del matematico musulmano Mohammed ibn-Musa al-Kuwarīzmi (IX sec.) recante il titolo *Algorithmi de numero Indorum*.

Notevole è pure l'opera di traduzione delle opere arabe dell'ebreo catalano Abraham Savasorda (XI-XII sec.).

strada doveva essere fatta per ottenere il maneggevole simbolismo attuale, che appare definitivamente consolidato solo verso la fine del XVII secolo.

3. Fino alla fine del XIX secolo, una volta assimilato e consolidato il sistema di numerazione indo-arabo, i matematici e tutti quelli che se ne servivano lo facevano seguendo alcune regole, che erano accettate senza una spiegazione logica. Le riassumo come ce le trasmette F. Waismann [6, pagg. 80-81].

« Leggi per l'addizione:

1) $a + b$ è sempre un numero, cioè l'addizione può venir eseguita illimitatamente;
2) $a + b$ è determinato in modo univoco, esiste cioè un solo numero che sia somma di a e b;
3) $a + b = b + a$ (legge commutativa);
4) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (legge associativa);
5) se è $a > b$, sarà pure $a + c > b + c$ (legge della monotonia).

« Leggi della moltiplicazione:

6) $a \cdot b$ è sempre un numero, cioè l'addizione può venir eseguita illimitatamente;
7) $a \cdot b$ è determinato in modo univoco, esiste cioè un solo numero che sia somma di a e b;
8) $a \cdot b = b \cdot a$ (legge commutativa);
9) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (legge associativa);
10) se è $a > b$, sarà pure $a \cdot c > b \cdot c$ (legge della monotonia).

« Leggi che collegano fra loro addizione e moltiplicazione:

11) $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (1ª legge distributiva);
12) $(a + b) \cdot c = ac + bc$ (2ª legge distributiva). »

Queste 12 regole erano dunque alla base del calcolo con i numeri naturali e tutti (matematici, scienziati, commercianti, gente comune) se ne servivano, anche se forse in modo non del tutto consapevole.

Sennonché, verso la fine del XIX secolo, il matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) elaborò un sistema di 5 assiomi, sulla base dei quali fu possibile costruire e strutturare i numeri naturali, e dimostrare ovviamente le 12 leggi. La sua proposta comparve nel 1889 nell'opera *Arithmetices principia: nova methodo exposita*.

Giuseppe Peano

Il lavoro di Peano fu poi perfezionato da Alessandro Padoa (1886-1937) in un articolo che completò nel luglio del 1900 e che presentò al Congresso Internazionale di Filosofia, tenutosi a Parigi dall'1 al 5 agosto di quell'anno [4].

Vediamo allora come, partendo dai 5 assiomi di Peano e dalle basi logiche che li supportano (compresi il concetto di uguaglianza con le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, eccetera), sulle quali però non ci soffermiamo, ma che diamo per acquisite, sia possibile costruire e strutturare l'insieme dei numeri naturali.

4. Peano assume come concetti primitivi quelli di ***numero*** (**a**), di ***zero*** (**0**) e di ***successivo*** (**a***). Quindi, indicata con $\mathbb{N}$ la classe dei naturali, introduce 5 postulati:

1. $\mathbf{0} \in \mathbb{N}$
   (Zero è un numero)
2. $\mathbf{a} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{a}^* \in \mathbb{N}$
   (Il successivo di un numero è un numero)
3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N},\ \mathbf{a}^* = \mathbf{b}^* \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$
   (Se i successivi di due numeri sono uguali anche i due numeri sono uguali)
4. $\mathbf{a} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{a}^* \neq \mathbf{0}$
   (Zero non è il successivo di alcun numero)
5. $\mathbf{P} : \{\mathbf{P}(\mathbf{0}) \wedge (\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{a}^*))\} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbf{x}))$
   (Se zero gode di una proprietà e se ogni volta che un numero gode di quella proprietà lo stesso vale per il successivo del numero, allora tutti i numeri godono di quella proprietà)
   (Si tratta evidentemente del celebre **principio d'induzione**: di esso Peano si serve per le sue dimostrazioni in maniera sistematica e continuativa).
   Ricordo che la proprietà P(0), cioè a dire che P vale per 0 è la *base dell'induzione*; invece la proprietà P(a)→P(a*) per ogni numero a, è il *passo induttivo*. La proprietà P(a) è denominata *ipotesi induttiva*.

OSSERVAZIONE. Il quinto postulato, cioè il principio di induzione, in pratica afferma che, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che soddisfa le due proprietà seguenti:

i) $0 \in \mathbb{N}$,

ii) $a \in \mathbb{N} \rightarrow a^* \in \mathbb{N}$,

allora A coincide esattamente con $\mathbb{N}$.

Dai postulati 1 e 2 discende subito la definizione del numero "uno". Precisamente:
Il successivo del numero **0** è un numero che si chiama "uno" (simbolo: **1**). In simboli: $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$.

- Ci occupiamo adesso dell'addizione, la quale è definita dal seguente enunciato.

L'**addizione**, nell'insieme $\mathbb{N}$, è un'operazione binaria (simbolo: "+", si legge: "più"), il cui risultato (detto **somma**), è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- la somma di a con 0 è a;
- la somma di a con il successivo di b è il successivo di a+b.

In simboli, nell'ordine:

(1) $$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}\,,$$
(2) $$\mathbf{a} + \mathbf{b}^* = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^*,$$

dove a, b sono numeri naturali qualsiasi.

Si può notare che dalle (1) e (2) segue:

(1') $$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}\,.$$

Di fatto, la (1') è vera per a=0 (base dell'induzione), poiché chiaramente 0+0=0. Dimostriamo che, se è vera per a=k (cioè 0+k=k – ipotesi induttiva) allora è vera anche per a=k* (cioè 0+k*=k* – passo induttivo).

In realtà, per la (2) si ha: 0+k*=(0+k)*, e siccome abbiamo assunto per ipotesi che sia 0+k=k, allora: 0+k*=k*. Quindi, in virtù del principio d'induzione, la (1') è vera per ogni a.

Si noti poi che dalle (1) e (2) segue pure che il successivo a* del numero a è uguale alla somma di a con il numero 1. Vale a dire:

(3) $$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + \mathbf{1}\,.$$

Di fatto, da a+0*=(a+0)* segue a+1=a* e perciò, per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, a*=a+1.

Si desume subito come ad un qualsiasi numero si possa sommare 1, 2, 3, 4, … . Per esempio:
$1+1 = 1^* = 2$, $2+1 = 2^* = 3$, $3+1=3^*=4$, ... ; $3+2 = 3+1^* = (3+1)^* = 4^* = 5$; eccetera.

Si dimostrano alcuni teoremi, che esprimono le proprietà dell'addizione sui naturali.

TEOREMA 1. **Proprietà associativa dell'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, c, risulta:

(4) $$\mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ricorre al principio d'induzione.

Quali che siano a, b, la proprietà è vera per $c=0$ (base dell'induzione). Infatti:

	(a)	$a+(b+0) =$
per la (1) in (a)	(b)	$= a+b =$
per la (1) in (b)	(c)	$= (a+b)+0$.

Dimostriamo che, se la proprietà è vera per $c=k$ (ipotesi induttiva), allora è vera anche per $c=k+1$ (passo induttivo).

Ora, appunto per $c=k+1$, si ha:

	(d)	$a+(b+c) =$
poiché $c=k+1$ in (d)	(e)	$= a+[b+(k+1)] =$
per la (3) in (e)	(f)	$= a+(b+k^*) =$
per la (2) in (f)	(g)	$= a+(b+k)^* =$
per la (2) in (g)	(h)	$= [a+(b+k)]^* =$
per la (3) in (h)	(i)	$= [a+(b+k)]+1 =$
per la (4), assunta per vera quando $c=k$, in (i)	(l)	$= [(a+b)+k]+1 =$
per la (3) in (l)	(m)	$= [(a+b)+k]^* =$
per la (2) in (l)	(m)	$= (a+b)+k^* =$
per la (3) in (m)	(n)	$= (a+b)+(k+1) =$
poiché k+1=c in (n)		$= (a+b)+c$.

In conclusione, per ogni scelta di a, b, c, risulta: a+(b+c)=(a+b)+c. [c.v.d.]

TEOREMA 2. **Proprietà commutativa dell'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, risulta:

(5) $$\mathbf{a + b = b + a}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle (1) e (1') segue:

(5') $$\mathbf{a + 0 = 0 + a}\,,$$

per cui la (5) vale quando $b=0$.

Ora, per il seguito della dimostrazione, occorre far vedere pure che la proprietà vale per $b=1$, cioè che per ogni a risulta:

(5'') $$\mathbf{a + 1 = 1 + a}\,.$$

Per provare la (5'') procediamo ancora con il principio d'induzione.

Se nella (5') poniamo $a=1$, otteniamo l'uguaglianza $1+0=0+1$; si desume perciò che la proprietà $(a+1=1+a)$ vale per $a=0$ (base dell'induzione).

Ammettiamo che valga per $a=k$ (cioè ammettiamo che sia: $k+1=1+k$ – ipotesi induttiva) e dimostriamo che vale ancora per $a=k+1$ (passo induttivo).

Ora, appunto per $a=k+1$, si ha:

	(a)	$a+1 =$
poiché a=k+1 in (a)	(b)	$= (k+1)+1 =$
poiché abbiamo ammesso che k+1=1+k, in (b)	(c)	$= (1+k)+1 =$
per la (4) in (c)	(d)	$= 1+(k+1) =$
poiché a=k+1 in (d)		$= 1+a$.

Quindi, per ogni a risulta: a+1=1+a.

Prendiamo adesso in esame il caso in cui b sia un numero naturale qualsiasi e, ancora una volta, procediamo con il principio d'induzione. In base alla (5"), qualunque sia a, la proprietà (5) è certamente vera per b=1 (base dell'induzione). Ammettiamo allora che sia vera per b=k e dimostriamo che è ancora vera per b=k+1 (passo induttivo).

Ora, appunto per b=k+1, si ha:

	(e)	a+b =
poiché b=k+1 in (e)	(f)	= a+(k+1) =
per la (4) in (f)	(g)	= (a+k)+1 =
per la (5), assunta per vera quando b=k, in (g)	(h)	= (k+a)+1 =
per la (4) in (h)	(i)	= k+(a+1) =
per la (5") in (i)	(l)	= k+(1+a) =
per la (4) in (l)	(m)	= (k+1)+a =
poiché b=k+1 in (m)		= b+a.

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b. [c.v.d.]

- Passiamo alla moltiplicazione, la quale è definita dal seguente enunciato.

La **moltiplicazione** coi numeri naturali è un'operazione binaria (simbolo: "×", si legge "per"; oppure "·" oppure "niente" se non si creano equivoci), il cui risultato (detto **prodotto**), è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- il prodotto del numero a per 0 è uguale a 0;
- il prodotto di a per il successivo di b è uguale al prodotto di a per b aumentato di a.

In simboli, nell'ordine:

(6) $$\mathbf{a \cdot 0 = 0\,,}$$
(7) $$\mathbf{a\, b^* = a\, b + a\,,}$$

dove a, b sono numeri naturali qualsiasi.

Esempi:

$3\times2 = 3\times1^* = 3\times1 + 3 = 3+3 = 6;\quad 5\times2 = \ldots = 10;\quad 5\times3 = 5\times2^* = 5\times2 + 5 = 10+5 = 15.$

Si può notare che dalle (6) e (7) segue:

(6') $$\mathbf{0 \cdot a = a}\,.$$

Di fatto, la (6') è vera per a=0, poiché chiaramente 0·0=0. Di mostriamo che, se è vera per a=k (cioè 0·k=k) è vera anche per a=k* (cioè 0·k*=k*). In realtà, per la (7) si ha: 0·k*=0·k+0, e siccome abbiamo assunto per ipotesi che sia 0·k=0, allora: 0·k*=0. Quindi, in virtù del principio d'induzione, la (1') è vera per ogni a.

Si noti poi che dalle (6) e (7) segue pure che il prodotto del numero a per 1 è uguale ad a. Vale a dire:

(8) $$\mathbf{a \cdot 1 = a.}$$

Di fatto, a·1=a·0*=a·0+a=0+a=a.

Si dimostra un teorema che esprime il legame fra l'addizione e la moltiplicazione.

TEOREMA 3. **Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, c:

(9) $$\mathbf{a\,(b + c) = a\,b + a\,c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente, in virtù della (1) e della (6), la proprietà è vera per c=0.

Ammettiamo adesso che sia vera per c=k e dimostriamo che è vera per c=k+1.

Ora, appunto per c=k+1, si ha:

	(a)	a(b+c) =
poiché c=k+1 in (a)	(b)	= a[b+(k+1)] =
per la (4) in (b)	(c)	= a[(b+k)+1] =
per la (3) in (c)	(d)	= a(b+k)* =

per la (7) in (d)	(e)	$= a(b+k)+a =$
per la (9), assunta per vera quando c=k, in (e)	(f)	$= (ab+ak)+a =$
per la (4) in (f)	(g)	$= ab+(ak+a) =$
poiché $ak+a=ak^*=a(k+1)$, in (g)	(h)	$= ab+a(k+1) =$
siccome $c=k+1$ in (h)		$= ab+ac$.

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b, c. [c.v.d.]

Si dimostrano alcuni teoremi, che esprimono le proprietà della moltiplicazione sui naturali.

TEOREMA 4. **Proprietà associativa della moltiplicazione**:

Comunque si scelgano i numeri naturali a, b, c:

(10) $$\mathbf{a\ (b\ c) = (a\ b)\ c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Quali che siano a, b, la proprietà è vera per $c=0$. Infatti, dalla (6):

$$a(b\cdot 0)=a\cdot 0=0=(ab)\cdot 0\ .$$

Dimostriamo che, se è vera per $c=k$, è vera anche per $c=k+1$. Ora, appunto per $c=k+1$, si ha:

	(a)	$a(bc) =$
poiché $c=k+1$ in (a)	(b)	$= a[b(k+1)] =$
per la (9) in (c)	(d)	$= a(bk+b) =$
per la (9) in (d)	(e)	$= a(bk)+ab =$
per la (10), assunta per vera quando c=k, in (e)	(f)	$= (ab)k+ab =$
per la (7) in (f)	(g)	$= (ab)k^* =$
per la (3) in (g)	(h)	$= (ab)(k+1) =$
poiché $c=k+1$ in (h)		$= (ab)c$.

In conclusione, la proprietà è vera per ogni scelta di a, b, c. [c.v.d.]

TEOREMA 5. **Proprietà commutativa della moltiplicazione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b:

(11) $$\mathbf{a\ b = b\ a}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare questa proprietà abbiamo bisogno di un paio di risultati preliminari.

Anzitutto proviamo che, per ogni a risulta:

(11') $$\mathbf{a \cdot 1 = 1 \cdot a.}$$

Procediamo ancora una volta con il principio d'induzione per provare la (11').

Dalle (6) e (6') segue $0\cdot 1=1\cdot 0$, per cui la proprietà (11′) vale per $a=0$ (base dell'induzione).

Ammettiamo che valga per $a=k$ (cioè ammettiamo che sia: $k\cdot 1=1\cdot k$ – ipotesi induttiva) e dimostriamo che vale ancora per $a=k+1$ (passo induttivo).

Ora, appunto per $a=k+1$, si ha:

	(a)	$1\cdot a =$
poiché $a=k+1$ in (a)	(b)	$= 1\cdot(k+1) =$
per la (9) in (b)	(c)	$= 1\cdot k+1 =$
per la (11'), assunta per vera quando a=k, in (c)	(d)	$= k\cdot 1+1 =$
per la (8) in (d)	(e)	$= k+1 =$
per la (8) in (e)	(f)	$= (k+1)\cdot 1 =$
poiché $a=k+1$ in (f)		$= a\cdot 1$.

Perciò la (11') rimane provata, usando il principio di induzione.

Naturalmente, tenendo presente la (8) e la (11'), si ha pure:

(8') $$\mathbf{1 \cdot a = a\ .}$$

Ora occorre provare che:

(11" $$\mathbf{(k+1)\cdot a = k\cdot a + a\ .}$$

Anche in questo caso usiamo il principio di induzione.

Anzitutto, la (11’’) è senz’altro vera quando a=0, perché (k+1)·0=0 dalla (6), e k·0+0=0 dalla (6) e dalla (1). Ora, supponiamo vera la proprietà per a=h, e proviamo che è vera per a=h+1, proviamo cioè che risulta: (k+1)·(h+1)=k·(h+1)+ h+1.

Si ha che:

	(a)	(k+1)·(h+1) =
dalla (9) e dalla (8’) in a	(b)	= (k+1)·h+(k+1) =
per la (11’), supposta vera per a=h, in (b)	(c)	= k·h+h+k+1 =
per la (5) in (c)	(d)	= k·h+k+h+1 =
per la (9) in (d)	(e)	= k·(h+1)+h+1 .

Perciò anche la (11’’) rimane provata, usando il principio di induzione.

Ora proviamo finalmente la (11). Di nuovo, usiamo il principio di induzione.

Sappiamo dalla (6) che la proprietà (11) è certamente vera per b=0. Ammettiamo allora che sia vera per b=k e dimostriamo che è ancora vera per b=k+1.

Ora, appunto per b=k+1, si ha:

	(g)	ab =
poiché b=k+1 in (g)	(h)	= a(k+1) =
per la (9) in (h)	(i)	= ak+a·1 =
per la (11) quando b=k e la (11’) in (i)	(l)	= ka+a =
per la (11’’) in (l)	(m)	= (k+1)a =
poiché b=k+1 in (m)		= ba .

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b. [c.v.d.]

5. Il teorema 3 è quello che Waismann denomina “1ª proprietà distributiva”.

La 2ª proprietà distributiva discende immediatamente dalla 1ª in virtù della proprietà commutativa della moltiplicazione. Di fatto, dalla (9), appunto per la proprietà commutativa della moltiplicazione, segue:

(9’) $$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\, \mathbf{a} = \mathbf{b\, a} + \mathbf{c\, a}\ .$$

6. Rimangono a questo punto da dimostrare le proprietà di monotonia per completare il quadro delle 12 leggi enunciate da Waismann. Naturalmente occorre precisare il concetto di “maggiore”.

Ebbene, si dice che il numero naturale a è ***maggiore*** del numero naturale b (in simboli: a>b) se e solo se esiste un numero naturale c tale che a=b+c.

Prima di andare alle proprietà di monotonia, dobbiamo occuparci però di altre due proprietà, le cosiddette “proprietà di regolarità”, le quali fanno da premessa alle proprietà di monotonia.

TEOREMA 6. **Proprietà di regolarità dell’addizione**.

Quali che siano i numeri naturali a, b, c:

(12) **se a = b allora a + c = b + c** .

DIMOSTRAZIONE.

Utilizziamo ancora una volta il principio d’induzione.

La (12) è certamente vera per c=0 (base dell’induzione). Ammettiamo che la (12) sia vera per c=k (ammettiamo cioè che sia a+k=b+k – ipotesi induttiva) e dimostriamo che è vera per c=k+1 (passo induttivo).

Ora, appunto per c=k+1 si ha:

	(a)	a+c =
poiché c=k+1 in (a)	(b)	= a+(k+1) =
per la (4) in (b)	(c)	= (a+k)+1 =
per la (12), avendo ammesso che sia a+k=b+k, in (c)	(d)	= (b+k) +1 =
per la (4) in (d)	(e)	= b+(k+1) =
poiché c=k+1 in (e)		= b+c .

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b, c. [c.v.d.]

TEOREMA 7. **Proprietà di regolarità della noltiplicazione**.

Quali che siano i numeri naturali a, b, c:

(15) **se a = b allora a c = b c** .

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo le c uguaglianze: a=b, a=b, … , a=b, e sommiamole membro a membro. Segue immediatamente la proprietà da dimostrare.

Possiamo passare adesso alle proprietà di monotonia.

TEOREMA 8. **Proprietà di monotonia dell'addizione**.

Quali che siano i numeri naturali a, b, c:

(14) **se a > b allora a + c > b + c** .

DIMOSTRAZIONE.

Se a>b allora esiste x tale che a=b+x, di conseguenza, per la (12): a+c=(b+x)+c ossia: a+c=(b+c)+x e pertanto: a+c>b+c. Come volevasi dimostrare.

TEOREMA 9. **Proprietà di monotonia della noltiplicazione**.

Quali che siano i numeri naturali a, b, c, purché c≠0:

(15) **se a > b allora a c > b c** .

DIMOSTRAZIONE.

Se a>b allora esiste x tale che a=b+x, di conseguenza, per la (13): ac=(b+x)c ossia: ac=bc+cx e pertanto: ac>bc. Come volevasi dimostrare.

7. A questo punto, lo studio dei numeri naturali può essere approfondito ulteriormente, introducendo in particolare le operazioni di sottrazione e divisione (come operazioni inverse dell'addizione e della moltiplicazione rispettivamente) e l'operazione di elevamento a potenza, e dimostrando le relative proprietà.

Si può ancora dimostrare che l'insieme ℕ è chiuso rispetto sia all'addizione sia alla moltiplicazione, mentre non lo è rispetto alla sottrazione e alla divisione, né rispetto all'elevamento a potenza.

Si può pure far vedere che la relazione "… è maggiore …", definita nell'insieme ℕ, gode delle proprietà *transitiva* e *mai riflessiva*. Il che permette di concludere che l'insieme è *ordinato in senso stretto* rispetto a quella relazione.

Si può pure introdurre inoltre il concetto di "minore", precisando che il numero a è ***minore*** del numero b (a<b) se e solo se b>a.

Si possono introdurre le note classificazioni dei numeri naturali: primi, complessi, perfetti, eccetera.

Si possono dimostrare interessanti proprietà, come le seguenti:

- $a+b = 0 \rightarrow a=0 \wedge b=0$,
- $a \cdot b = 1 \rightarrow a=1 \wedge b=1$,
- $a \cdot b = 0 \rightarrow a=0 \vee b=0$.

Insomma è possibile condurre uno studio completo e approfondito di questo insieme numerico.

Non ritengo comunque opportuno occuparmene in questa sede.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.

[2] Antonino Giambò, *La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, SEI, 1988.

[3] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.

[4] Alessandro Padoa, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entieres précédé d'une introduction logique à una théorie déductive qualconque*, Roma, 1900.

[5] Richard Spreckelmeyer – Kenneth Mustain, *I numeri naturali*, Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1967.

[6] Friedrich Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1971.