Punto a)

Punto base della famiglia di curve

Le curve della famiglia $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ sono definite $\forall x \neq 0$.
Se esiste un punto comune a tutte le curve (punto base) , sostituendo le sue coordinate nell'equazione $y = f_n(x)$, in cui si consideri come incognita il parametro n,si deve ottenere un'equazione indeterminata.

E' intuitivo che, scelto un valore di x appartenente al dominio, il valore di $y = f_n(x)$ è indipendente da n se $x = 1$ e che, pertanto, tutte le curve passano per lo stesso punto di ascissa $x = 1$ e ordinata $y = \ 2 - 3 + 3 = 2$

Procedendo in modo più generale, possiamo considerare due curve corrispondenti a due particolari valori del parametro n e determinarne gli eventuali punti comuni, verificando in seguito se appartengono anche a tutte le altre..
Siano $f_2(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$ e $f_3(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}$
Gli eventuali punti comune sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = \quad 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} \\ y = \quad 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^3} \end{cases} \quad x \neq 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^3} \rightarrow x^3 = x^2 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Poiché sostituendo le coordinate del punto $\boldsymbol{P(1, 2)}$ nell'equazione generale $y = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ si ottiene l'identità $2 = 2 - 3 + 3$, possiamo affermare che esso appartiene a tutte le curve della famiglia

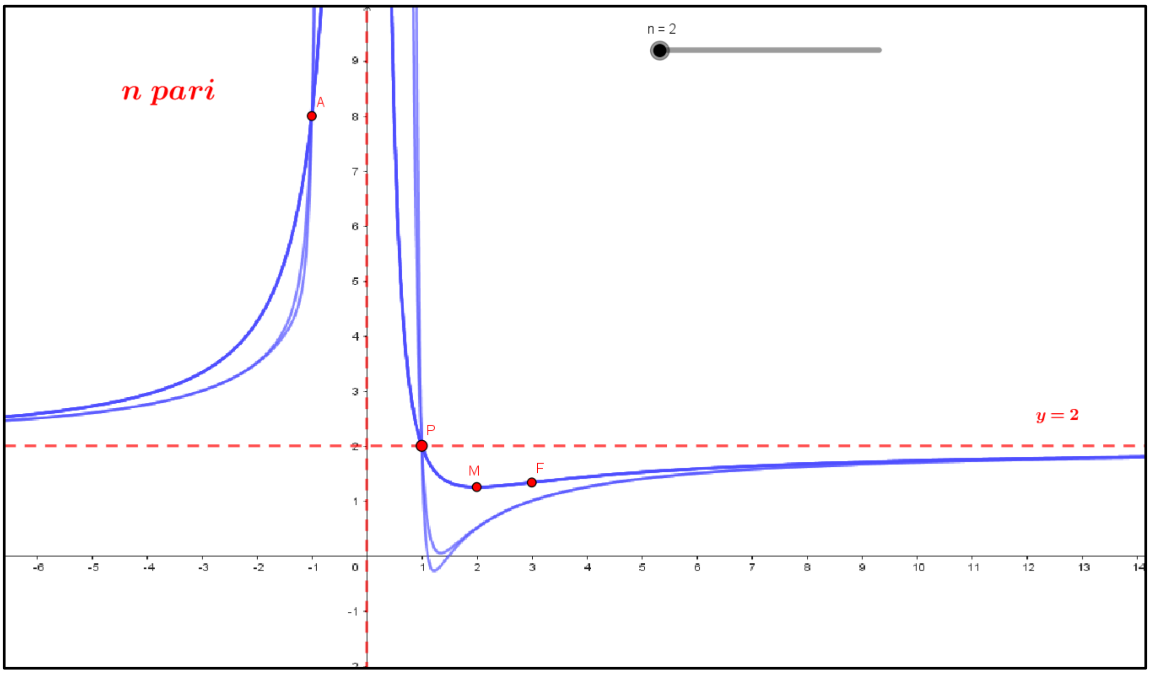
Confronto tra i grafici delle funzioni in base alla parità del parametro n
Estremi e flessi

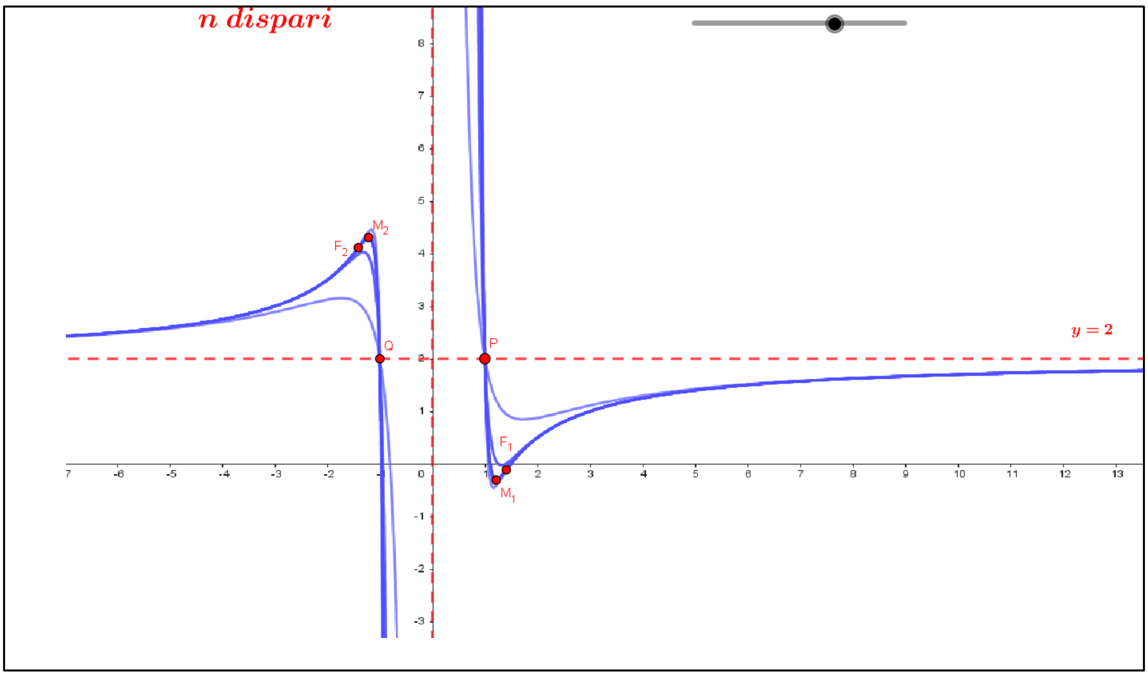
Le funzioni $f_n(x)$, $\ con\ n \in N\ \ e\ n > 1$, sono tutte derivabili due volte $\forall x \neq 0$

$$f_n'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3n}{x^{n+1}} = 3\ \frac{x^{n-1}-n}{x^{n+1}} \qquad f_n''(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{3n(n+1)}{x^{n+2}} = \frac{-6x^{n-1}+3n(n+1)}{x^{n+2}}$$

A) $\boldsymbol{n}$ **pari** $\rightarrow n-1$ e $n+1$ dispari , $n+2$ pari

$$\boldsymbol{f_n'(x)} = 3\ \frac{x^{n-1}-n}{x^{n+1}} \geq 0 \ \text{ per } x < 0\ \cup x \geq \sqrt[n-1]{n}$$





pertanto

- la funzione è crescente $x < 0 \ \cup x > \sqrt[n-1]{n}$,
- decrescente per $0 < x < \sqrt[n-1]{n}$
- ammette un minimo relativo nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$

$$\boldsymbol{f''_n(x)} = \frac{-6x^{n-1}+3n(n+1)}{x^{n+2}} \geq 0 \text{ per } x < 0 \ \cup \quad 0 < x \leq \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$$

pertanto

- la funzione è convessa per $x < 0 \ \cup \quad 0 < x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$,
- concava per $x > \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$
- ammette un **flesso** nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\boldsymbol{n}$ **dispari** → $n-1$ e $n+1$ pari , $n+2$ dispari

$$\boldsymbol{f'_n(x)} = 3\,\frac{x^{n-1}-n}{x^{n+1}} \geq 0 \text{ per } x \leq -\sqrt[n-1]{n} \quad \cup \quad x \geq \sqrt[n-1]{n}$$

pertanto

- la funzione è crescente $x < -\sqrt[n-1]{n} \ \cup x > \sqrt[n-1]{n}$,
- decrescente per $-\sqrt[n-1]{n} < x < 0 \quad \cup \quad 0 < x < \sqrt[n-1]{n}$
- ammette un **massimo relativo** nel punto di ascissa $-\sqrt[n-1]{n}$ e un **minimo relativo** nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$

$$\boldsymbol{f''_n(x)} = \frac{-6x^{n-1}+3n(n+1)}{x^{n+2}} \geq 0 \text{ per}$$

$$x \leq -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \cup \quad 0 < x \leq \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$$

pertanto

- la funzione è convessa per

$$x < -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \cup \quad 0 < \ x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$$

- concava per

$$-\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} < x < 0 \quad \cup \quad x > \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$$

- ammette **due flessi** nel punto di ascissa

$$x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Al tendere di n all'infinito, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n-1]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n-1}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n+\ln(n+1)}{n-1}} = e^0 = 1$$

Asintoti

Poiché $\boldsymbol{f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} = \frac{2x^n-3x^{n-1}+3}{x^n} = \frac{x^{n-1}(2x-3)+3}{x^n}}$, si deduce facilmente che

- la retta di equazione **x=0 è asintoto verticale** per tutte le curve della famiglia e che

$$\lim_{x\to0^-} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty \qquad \textbf{se n è pari}$$

$$\lim_{x\to0^-} f_n(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty \qquad \textbf{se n è dispari}$$

- la retta di equazione $\boldsymbol{y = 2}$ **è asintoto orizzontale** e che

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 2^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 2^- \quad \forall \boldsymbol{n}$$

La seconda proprietà deriva dal fatto che la differenza $f_n(x) - 2 = -\frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$, per valori molto grandi di $|x|$, tende ad assumere lo stesso segno del termine $-\frac{3}{x}$ indipendentemente dal valore di $n > 1$

Tutte le curve della famiglia incontrano l'asintoto orizzontale nel punto $\boldsymbol{P(1,2)}$
Le curve corrispondenti ai valori **dispari $\boldsymbol{di\ n}$** l'incontrano anche nel punto $\boldsymbol{Q(-1,2)}$
Infatti, l'equazione binomia $2 = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} \to x^{n-1} = 1$ ammette l'unica radice reale $\boldsymbol{x = 1}$ se $\boldsymbol{n}$ è $\boldsymbol{pari}$ $(\, e\ quindi\ n-1$ è $dispari)$, ammette le due soluzioni $\boldsymbol{x = \pm 1}$ se $\boldsymbol{n}$ è $\boldsymbol{dispari}$ $(\, e\ quindi\ n-1$ è $pari)$,

Va osservato che, per i valori di n di uguale parità, esistono due punti base della corrispondente famiglia di curve.
$\boldsymbol{P(1,2)\ \ e\ A(-1,8\,)}$ per $\boldsymbol{n\ pari}$

$\boldsymbol{P(1,2)\ \ e\ Q(-1,2\,)}$ per $\boldsymbol{n\ dispari}$,

Punto b

Grafico di $f_3(x)$- esistenza di un unico zero

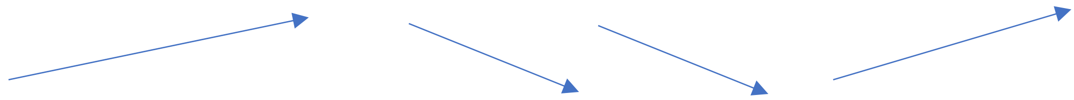
La funzione $f_3(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3}{x^3}$ gode delle proprietà trovate, in generale, per tutte le funzioni della famiglia e ,in particolare, per quelle corrispondenti ai valori dispari di n.

Per verificare che ammette un unico zero reale, di ascissa negativa , prendiamo in considera zione lo studio della monotonia delle funzioni corrispondenti ai valori dispari n e osserviamo che, per n=3 gli estremi relativi sono

$$M_1\left(\sqrt{3}\quad, \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)\ \ minimo\ relativo$$

$$M_2\left(-\sqrt{3}\quad, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)\ \ massimo\ relativo$$

____________________-√3___________0___________√3 ____________________



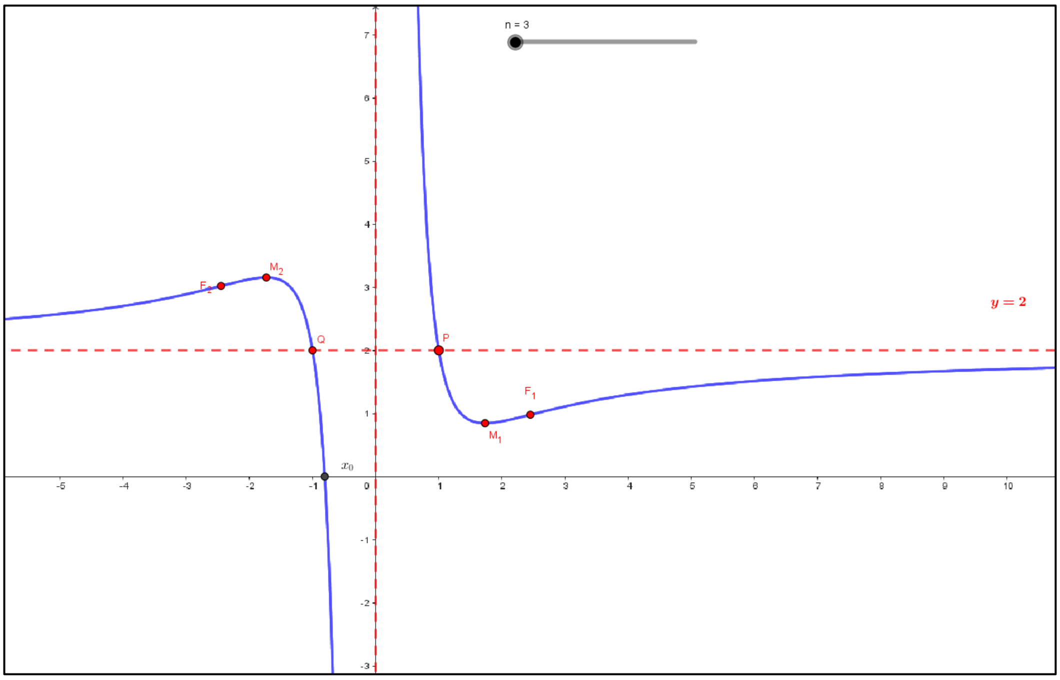
Per $\boldsymbol{x > 0}$ la funzione assume solo valori positivi, in quanto

- $\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = +\infty$
- $f_3(x)$ decresce nell'intervallo $0 < x < \sqrt{3}$ e cresce nell'intervallo $x > \sqrt{3}$
- il minimo relativo è il punto M_1 *di ordinata* $\frac{6-2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}84 > 0$

Per x<0

- $\lim_{x \to -\infty} f_3(x)=2^+$
- $f_3(x)$ cresce nell'intervallo $x < -\sqrt{3}$
- il massimo relativo è il punto M_2 di ordinata $\frac{6+2\sqrt{3}}{3} \approx 3{,}15$
- la funzione decresce nell'intervallo $-\sqrt{3} < x < 0$ attraversando l'asintoto orizzontale nel punto Q(-1,2)
- $\lim_{x \to 0^-} f_3(x)=-\infty$

  Possiamo affermare che la curva attraverserà l'asse delle x in un punto di ascissa $x_o \in]-1{,}0[$,per il teorema di esistenza degli zeri , e che la funzione non si può annullare ulteriormente .



Discussione dell'equazione $f_3(x) = k$

L'equazione $f_3(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ è l'equazione risolvente del sistema algebrico

$$\begin{cases} y = & 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3} \\ y = & k \end{cases}$$

le cui soluzioni rappresentano le coordinate dei punti comuni alla curva, grafico di $f_3(x)$, con una generica retta del fascio di rette parallele al suo asintoto orizzontale.

L'equazione della curva, ricondotta alla forma polinomiale, è di quarto grado:

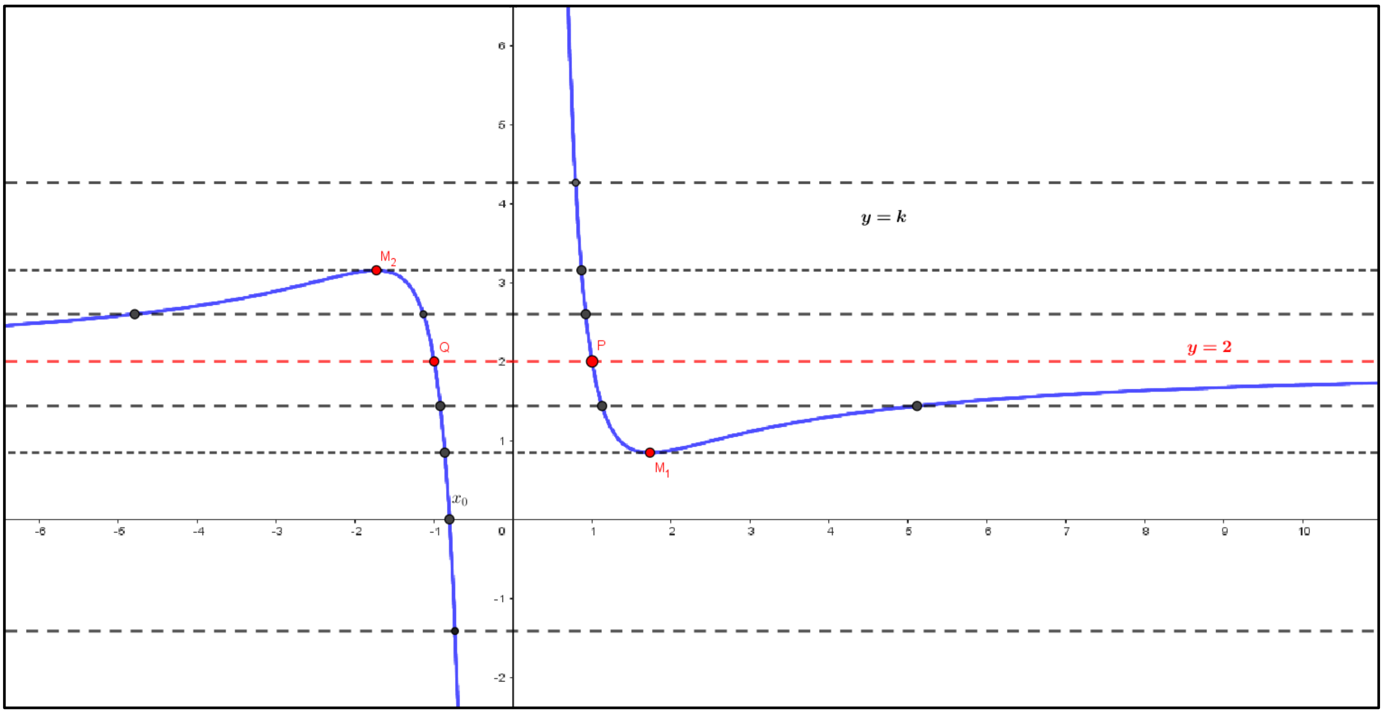
$$x^3y - 2x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$

L'equazione risolvente il sistema si riduce però al terzo grado

$$(k-2)x^3 + 3x^2 - 3=0$$

e ammette sempre almeno una radice reale.
Per $k = 2$ l'equazione si riduce ulteriormente di grado ed ammette le due soluzioni $x = \pm 1$ corrispondenti ai due punti in cui la curva incontra il suo asintoto orizzontale-
Le due rette di equazione $y=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, tangenti alla curva nei suoi punti di minimo e di massimo relativo, rispettivamente, hanno in comune con essa 3 punti di cui 2 coincidenti.

La discussione completa del numero e del segno delle radici può essere effettuata per via grafica osservando la figura seguente.

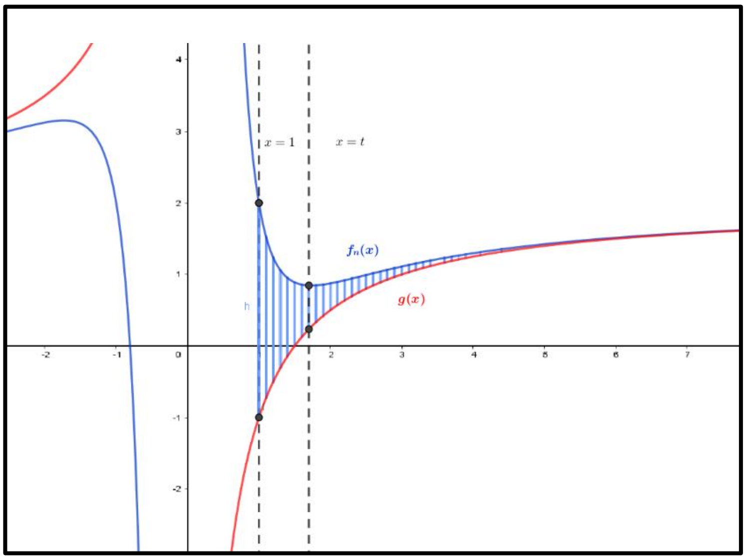


$k < \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$	una radice negativa
$k = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$	una radice negativa e due radici coincidenti positive
$\frac{6-2\sqrt{3}}{3} < k < 2$	tre radici reali e distinte, di cui una negativa e due positive
$k = 2$	due radici reali, una positiva e una negativa
$2 < k < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	tre radici reali e distinte, di cui due negative e una positiva
$k = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	due radici coincidenti negative e una radice positiva
$k > \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	una radice positiva

Punto c)

La differenza tra le due funzioni $f_n(x)$ e $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ è la funzione $\frac{3}{x^n}$, positiva per $x > 0$ indipendentemente dal valore di n.

Significato geometrico: nel semipiano delle x positive, il grafico della prima funzione si trova sempre al di sopra del grafico della seconda



L'area della regione di piano delimitata dalle due curve e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = t$ $(t>1)$ sarà uguale a

$$\int_1^t \big(f_n(x) - g(x)\big)\,dx = \int_1^t \frac{3}{x^n}\,dx = \left[\frac{3}{(1-n)x^{n-1}}\right]_1^t = \frac{3}{n-1}\left(1 - \frac{1}{t^{n-1}}\right)$$

Se $t \rightarrow +\infty$ si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{3}{n-1}\left(1-\frac{1}{t^{n-1}}\right) = \frac{3}{n-1} \text{ essendo } \quad n > 1$$

Il risultato, interpretato geometricamente, rappresenta l'area della regione, appartenente al semipiano $x \geq 1,$ compresa tra i grafici delle due funzioni $f_n(x)$ $e\ g(x)$ e la retta di equazione $x = 1$. Alla regione, illimitata in quanto le due curve non si incontrano, si può assegnare un valore finito, in virtù della convergenza dell'integrale improprio.

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^n}\,dx$$

Punto d.

Calcolo del limite

$\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^n}-\frac{3}{x}}{-\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x^{n-1}}\right) = 1$ in quanto il termine $\frac{1}{x^{n-1}}$ tende a 0 $\forall n \in N, n > 1$

Si può verificare facilmente che, eliminando una o entrambe le condizioni assegnate al parametro n , si perviene a risultati diversi.
A titolo di esempio, osserviamo che per $n = 1$ il risultato è 0 e che per $n = \frac{1}{2}$ si ottiene $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{x}\right) = -\infty$