

## La geometria delle api

*Le api sono piccoli esseri che offrono  
all'uomo il dono celeste del miele  
(Virgilio, Georgiche)*

Le api sono a rischio estinzione per cambiamenti climatici, inquinamento degli habitat e uso dei pesticidi. Eppure insieme ad altri insetti sono fondamentali per la biodiversità, sono le principali responsabili di circa il 75% dell'impollinazione delle colture agrarie e garantiscono circa il 35% della produzione globale di cibo. Il valore commerciale di questo dono è stato stimato in circa 260 miliardi di euro all'anno. L'ape più antica è stata trovata nel Myanmar all'interno di una resina fossile risalente a circa cento milioni di anni fa. I Sumeri lo usavano in cosmesi intorno al 2500 a.C. e Assiri e Babilonesi in medicina. Sembra che Aristotele sia stato il primo a studiare le api. Solo verso la fine del XVII secolo l'invenzione del microscopio ha consentito uno studio scientifico dell'entomologia degli insetti.

La raffinata organizzazione sociale comprende la regina (unica feconda), le operaie (tra cui le bottinatrici per la raccolta del polline, le nutrici per accudire larve e regina e le guardiane per difendere l'alveare) e i maschi (i fuchi). Tranne la regina, che può vivere fino a 6 anni, le operaie vivono circa 6 mesi in inverno e mediamente 45 giorni nei periodi di raccolta dei pollini. I maschi hanno il compito di fecondare la regina, che si accoppia con diversi maschi (fino a 16) durante il *volo nuziale*, una sola volta nella sua vita, conserva lo sperma per tutta la vita e può deporre fino a 3000 uova al giorno. I maschi muoiono al termine dell'accoppiamento per il distacco dell'apparato riproduttivo dall'addome. E quelli che non riescono ad accoppiarsi con la regina vengono scacciati.



L'evoluzione ha dotato le api di una buona intelligenza individuale, potenziata da una sorta di intelligenza sociale: i bisogni collettivi sono più importanti di quelli individuali. Vivono in colonie di circa sessantamila unità, all'interno di alveari naturali o in arnie preparate dall'uomo. Durante l'inverno, quando la temperatura scende al di sotto dei 10 gradi, le api non abbandonano il proprio alveare e assumono una formazione sferica (glomere) per mantenere la temperatura intorno ai 35 gradi. All'interno del nido, con la cera da loro prodotta costruiscono 5 favi, ciascuno contenente due strati, contrapposti e incastrati l'uno nell'altro, di celle (400 per ogni decimetro quadrato) prismatiche esagonali regolari con il fondo piramidale, formato da tre rombi uguali tra loro (fig. 1).

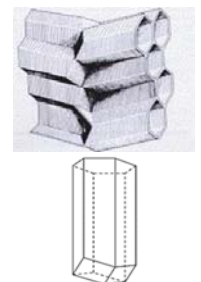


Fig. 1

Le celle servono per deporre le uova, nutrire le larve e stoccare il miele. Per produrre la cera le api trasformano il miele e per 1 grammo di cera impiegano circa 10 grammi di miele. La cera è quindi un prodotto raro e non va sprecato. Le celle non sono cilindriche, come lascerebbe pensare la forma delle api e delle uova, perché avvicinando celle cilindriche rimarrebbero nel favo spazi vuoti (fig. 2) e il gran numero di celle renderebbe il favo troppo grande, con spazi non utilizzabili e dispendio di cera. Per ridurre il volume complessivo del favo e risparmiare cera e fatica le api optano per una forma delle celle che, a parità di volume, abbiano superficie laterale minima e avvicinate tra loro non lascino spazi inutilizzati. Fissata l'altezza delle celle, il loro volume e superficie laterale dipendono dall'area e perimetro di una sezione piana e quindi cercano figure piane, diverse dai cerchi, che ricoprano la sezione piana

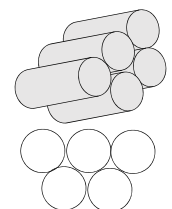


Fig. 2

senza sovrapposizioni e spazi vuoti (tassellazione, come la pavimentazione di una stanza), abbiano area fissata e perimetro minimo.

Questo è il famoso e antico *“PROBLEMA ISOPERIMETRICO CLASSICO”*: *“fra tutte le figure piane di uguale perimetro, determinare quella di area massima o, equivalentemente, tra tutte le figure piane di uguale area determinare quella di perimetro minimo”*. Pappo di Alessandria (290-350 d.C.) nel Libro V delle *“Collezioni matematiche”* riporta tre proposizioni del matematico greco Zenodoro (II sec. a.C.), riformulabili equivalentemente al modo seguente: 1) il cerchio ha perimetro minore di ogni poligono avente la stessa area; 2) tra tutti i poligoni di uguale area e uguale numero di lati ha perimetro minore quello regolare (cioè equilatero e angoli interni congruenti); 3) tra due poligoni regolari di uguale area, ha perimetro minore quello con il maggior numero di lati. Scartato il cerchio per i motivi detti, la proposizione 2) *“suggerisce”* alle api di cercare tra i poligoni regolari che tassellano una superficie piana. Ora si dimostra facilmente che *“i poligoni regolari che riescano a tassellare una superficie piana sono soltanto il triangolo equilatero, il quadrato e l’esagono regolare”* (fig. 3).

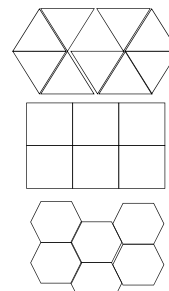


Fig. 3

In base alla proposizione 3) l’esagono a parità di area ha perimetro minimo. Le celle prismatiche esagonali regolari riempiono, quindi, senza spazi inutilizzabili tutto il favo e, a parità di volume, hanno superficie laterale minima e consentono un risparmio di cera, lavoro e tempi di costruzione perché ciascuna delle facce laterali di ogni cella diventa una faccia anche per le sei celle adiacenti. Inoltre il fondo piramidale di una cella di uno strato è automaticamente formato dai rombi di tre celle adiacenti dello strato opposto in cui essa si incunea. Il matematico scozzese Colin Mc Laurin nel 1743 ha, infine, dimostrato che *“fra tutte le celle esagonali con fondo composto di tre rombi uguali, quella che impegna il minimo di materia ha l’angolo maggiore dei rombi di  $109^{\circ}28'$ ”*, esattamente l’angolo con cui le api costruiscono i rombi.

Quanto *“sapere matematico”*!

Il cervello umano ha circa 85 miliardi di neuroni e quindi la sua intelligenza individuale è assolutamente superiore a quella di ogni altra specie animale, in particolare a quella delle api il cui cervello ha solo un milione di neuroni. In un alveare, però, ci sono circa 60 mila individui e la loro intelligenza sociale può contare su circa 60 miliardi di neuroni, quindi paragonabile a quella di un umano. Questa intelligenza collettiva garantisce la sopravvivenza delle colonie e la loro proliferazione.

Nicola Melone, 19 maggio 2023