La “costante di Eulero-Mascheroni”.

Abstract

Viene definita in due maniere differenti la <<costante di Eulero-Mascheroni>>γ. Dopo dei brevi profili biografici di Eulero e di Mascheroni, viene risolto il problema <<La corda elastica>>.

Ci proponiamo di valutare la somma degli inversi dei primi *n* numeri naturali: vale in proposito il seguente Teorema.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=logn+\gamma+\varepsilon_n \qquad (1)$$

dove $\gamma=0,5772...$, $0<\varepsilon_n<\frac{1}{n}$ (γ si dice “costante di Eulero-Mascheroni”).

Se si pone

$$H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}, \qquad (2)$$

la (1) diventa

$$\gamma=H(n)-log\,n-\varepsilon_n,\quad (0<\varepsilon_n<\frac{1}{n}), \quad (3)$$

ovvero

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}[H(n)-log\,n] \qquad (4)$$

Dalla (3) si ricava che

$$H(n)-log\,n-\frac{1}{n}<\gamma<H(n)-log\,n. \qquad (5)$$

Assumendo n = 2, otteniamo

$$1-log\,2<\gamma<\frac{3}{2}-log\,2,\ \text{cioè}\ 0,30...<\gamma<0,80...$$

$$0,30<\gamma<0,81.$$

Per n = 16, otteniamo

$$\frac{1.195.757}{360.360}-log\,16<\gamma<\frac{2.436.559}{720.720}-log\,16,\ \text{cioè}\ 0,54...<\gamma<0,60...$$

$$0,54<\gamma<0,61.$$

La costante γ è un numero trascendente e il suo valore con 20 cifre decimali è

$$\gamma=0,57721566490153286061.$$

Ora si può calcolare con un errore per difetto che non supera $\frac{1}{n}$, la somma dei primi n termini della serie armonica $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

applicando la relazione

$$H(n)=log\,n+\gamma,\qquad \gamma=0,5772. \qquad (6)$$

Avremo così

$$H(10^2) = 5,1824 \qquad H(10^3) = 7,4849$$
$$H(10^6) = 14,3927 \qquad H(10^9) = 21,3005$$
$$H(10^{12}) = 28,2082 \qquad H(10^{24}) = 55,8392$$
$$H(10^{50}) = 115,7064 \qquad H(10^{100}) = 230,8357$$

Questi risultati ci mostrano chiaramente che la serie armonica, che è divergente (anche se il suo termine generale $\frac{1}{n}$ tende a zero al crescere indefinitamente dell'indice), diverge molto lentamente.

Inoltre, essendo dalla (3)

$$\frac{H(n)}{\log n} = \frac{\gamma}{\log n} + 1 + \frac{\varepsilon_n}{\log n}$$

si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H(n)}{\log n} = 1.$$

Si suol dire che H(n) "diverge come" log n.

La costante γ figura bene tra i personaggi di rango della matematica, quali $0, 1, i, e, \pi$, legati fra di loro da quella che Richard Phillips Feynman (1918-1988), Premio Nobel per la fisica nel 1965 insieme a Julian Seymour Schwinger e Shin-Ichiro Tomonaga, ha definito "la più bella formula di tutta la matematica":

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \qquad (7)$$

***

La "costante di Eulero-Mascheroni" γ si può anche definire come la somma della serie

$$1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} + ... \qquad (8)$$

Questa serie è convergente perché verifica le seguenti condizioni: i termini si susseguono a segni alternati, la successione dei valori assoluti dei termini è decrescente; il termine generale converge a zero.

La somma parziale fino al termine $1/n$ è $H(n) - \log n$ e dà un valore per eccesso di γ con un errore che non supera $\log\frac{n+1}{n} = \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

In conclusione si ha

$$\gamma = H(n) - \log n - \varepsilon_n, \quad (0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}),$$

che è proprio la (3).

***

Il matematico svizzero Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), noto in Italia come Eulero, si occupò delle più svariate discipline matematiche, lasciando sempre l'impronta del suo spirito geniale. Eulero fu indubbiamente il matematico più prolifico di tutti i tempi: le sue opere, che (inclusi

manoscritti e lettere) riempiono cento volumi “in quarto” [formato di libri di altezza compresa fra i 28 e i 38 cm], abbracciano tutti i campi dell’algebra, dell’analisi, della geometria, della meccanica, dell’astronomia conosciuti nel Settecento.
La “formula di Eulero” (1748) esprime l’esponenziale “e”, con esponente immaginario puro, per mezzo delle funzioni trigonometriche seno e coseno, precisamente

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sen\,\theta, \qquad (9)$$

dalla quale deriva, per es., il sorprendente

$$i^{i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,2078794... ,$$

oltre, ovviamente, alla formula (7).
Il “teorema di Eulero” afferma che:
“In un poliedro (convesso) la somma del numero delle facce e del numero dei vertici, è uguale al numero degli spigoli più due:

$$F + V = S + 2.\text{"} \qquad (10)$$

Ad esempio, un parallelepipedo ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli.
In una delle sue scoperte più geniali, Eulero riuscì a dimostrare la seguente uguaglianza:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} +...+ \frac{1}{n^2} +... = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (11)$$

Nel 1735 dimostrò che

$$\lim_{n\to\infty} H(n) = log\,n + \gamma\,. \qquad (12)$$

***

L’abate Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800) fu un matematico italiano che dal 1786 insegnò algebra e geometria all’Università di Pavia, divenendone in seguito rettore.
Fu apprezzato anche come poeta, soprattutto grazie al poemetto “Invito a Lesbia Cidonia”, del 1793, nel quale in 529 versi sciolti descrisse i vari gabinetti scientifici, i musei e i giardini botanici di Pavia.
Deve la sua fama matematica all’opera “La geometria del compasso”, stampata a Pavia nel 1797, con la quale dimostrò come tutti i problemi di geometria piana risolubili con riga e compasso, si potessero risolvere anche con l’uso del solo compasso.
Lorenzo Mascheroni studiò la costante γ nel 1790, individuando 32 cifre decimali.

***

Possiamo ora risolvere il problema “La corda elastica”.
Un verme si trova a un’estremità di una corda elastica lunga 1 metro.
Il verme striscia lungo la corda a un’andatura costante di 1 cm/s. Dopo il primo secondo, la corda si allunga come un elastico, raggiungendo la lunghezza di 2m. Dopo il secondo

successivo, si allunga fino a 3m, e così via. Riuscirà mai il verme a raggiungere l'altra estremità della corda?
Intuitivamente si penserà che il verme non raggiungerà "mai" l'estremità. Invece ci riesce! Quanto impiegherà?
Per risolvere questo problema bisogna capire che la corda si allunga uniformemente come un elastico. Questo significa che il verme "è trasportato in avanti dall'allungamento".
Un modo efficace per risolvere il problema consiste nel misurare l'avanzamento del verme dopo ogni secondo come una frazione della lunghezza della corda dopo quel secondo. Quando la somma di queste frazioni è uguale a 1, il verme è arrivato in fondo alla corda.
Ci sono 100cm in 1 m, quindi alla fine del primo secondo il verme ha coperto (1/100)-mo della lunghezza della corda. Dopo il secondo successivo, il verme è strisciato in avanti di un altro cm. Questa distanza è un altro (1/200)-mo della nuova lunghezza della corda, pari a 2 m. Dopo il terzo secondo, il verme ha percorso un altro (1/300)-mo dei 3m di lunghezza della corda, e così via. Dopo n secondi, l'avanzamento del verme, espresso come frazione dell'intera corda, è

$$d = \frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Per la (2) la somma inclusa tra parentesi è H(n); quindi, affinchè sia d = 1 dev'essere

$$H(n) = 100$$

e per la (6)

$$log\, n = 100 - \gamma = 99,4228.$$

Si ha allora

$$n = e^{99,4228} = 1,50929 \cdot 10^{43}.$$

Questo risultato esprime sia il tempo trascorso in secondi, sia la lunghezza finale della corda in metri.
Naturalmente, il problema è relativo a un verme ideale che rappresenta un punto su una corda elastica ideale; un verme reale morirebbe poco dopo essersi messo in viaggio e una corda elastica reale diventerebbe così sottile, allungandosi, da risultare formata da molecole separate da spazi incredibilmente ampi.

DOMENICO BRUNO

BIBLIOGRAFIA

T. CAPONETTO - G. CATANIA, *Esercizi di Analisi Matematica I, vol. I. C.U.L.C.*, Catania, *1990*
L. CHIELLINI - R. GIANNARELLI, *L'esame orale di matematica.* Veschi, Roma, 1962
M. CIPOLLA, *La Matematica elementare.* L. Macrì, Firenze, 1948
G. D'URSO, *Storie di matematica e di matematici.* Aracne editrice, Roma, 2019
M. GARDNER, *Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti.* RBA Italia, Milano, 2008
G. RICCI, *Analisi matematica. Vol I.* Libreria Editrice, Milano, 1960
A. SCIMONE, *La Sezione Aurea. Storia culturale di un "Leitmotiv" della Matematica.* Sigma Edizioni, Palermo, 1997
A. SOMMERFLED, *Partial Differential Equations in Physics.* Academic Press, New York, 1964