• Quale delle due seguenti espressioni:

a) $\sqrt{\mathbf{12} + \sqrt{\mathbf{12} + \sqrt{\mathbf{12} + \cdots}}}$

b) $\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2} + \cdots}}}$

fornisce il risultato maggiore?

Si tratta di un quesito in cui sono presenti due radicali entro cui si innesta una successione infinita di altri radicali simili. Il fatto che la successione non termini mai sembra il punto di debolezza, che è necessario convertire in forza. In effetti, indicato con x il *primo numero* assegnato, si può scrivere che

$$x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots}}} = \sqrt{12 + x}\,,$$

sicché risulta la seguente equazione irrazionale

$$x = \sqrt{12 + x}\,.$$

Dato che $x \geq 0$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri ed ottenere l'equazione di secondo grado

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad (\Delta = 1 + 48 = 49 > 0)\,.$$

Adoperando la ben nota formula risolutiva, si ottengono le due radici reali

$$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4\,, \quad x_2 = \frac{1-7}{2} = -3\,.$$

La seconda radice evidentemente va scartata e, pertanto, si può concludere che

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}=4\,.$$

Procedendo in maniera analoga per il *secondo numero* assegnato, che viene ancora una volta indicato con x, si perviene a discutere l'equazione irrazionale

$$x=2+\sqrt{x}$$

e dimostrare che

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=4\,.$$

In definitiva, la risposta al quesito proposto è che i due numeri assegnati sono identici.