Punti singolari nelle scienze sperimentali
di Antonino Giambò

1. Nel precedente articolo (*Punti di discontinuità di una funzione reale di variabile reale*) mi sono occupato della classificazione dei punti di discontinuità. Ebbene, qui ci interessa una categoria di punti di discontinuità non eliminabili, e più precisamente quelli che di norma sono classificati come punti di discontinuità di prima specie. Li tratteremo assieme ai punti in cui una funzione reale di variabile reale, pur essendo definita e continua, non è derivabile. Pe comodità, accomuneremo questi punti sotto l'unica denominazione di ***punti singolari***.

Ci interessa, in particolare, far vedere che non è raro imbattersi in punti siffatti trattando di funzioni che descrivono fenomeni tipici delle scienze sperimentali, in particolare della Fisica.

Prima di tutto richiameremo però alcune nozioni teoriche, giusto per non perdere di vista l'aspetto matematico della faccenda.

2. Ricordiamo allora che una funzione reale di variabile reale $f(x)$ si dice *continua in un punto* a se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

Se il limite destro e il limite sinistro in a esistono e sono finiti ma sono diversi, il punto a è un punto di discontinuità non eliminabile.

Ricordiamo anche che una funzione reale di variabile reale $f(x)$ si dice *derivabile in un punto* a se esiste ed è finito il limite seguente, denominato *derivata* della funzione in a e indicato con $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

- Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1.

Se una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in un punto a allora è continua in a.

- Com'è noto, non vale il teorema inverso, cioè *non è detto che una funzione continua in un punto sia ivi derivabile: può esserlo e può non esserlo*.

- Vale però quest'altro teorema, che è il contronominale del teorema 1.

TEOREMA 2.

Se una funzione reale di variabile reale $f(x)$ non è continua in un punto a allora non è derivabile in a.

Possiamo passare adesso ad una rassegna, comunque non esaustiva, di funzioni che descrivono fenomeni tipici della Fisica, le quali presentano punti in cui o non sono continue (e quindi neanche derivabili) o, pur essendo continue, non sono però derivabili.

3. Come primo esempio prendiamo in esame il percorso di un raggio luminoso monocromatico (per esempio luce rossa) che incide su una superficie α piana e riflettente.

Consideriamo il piano β nel quale viaggia il raggio luminoso. Esso è perpendicolare alla superficie α. Riferiamo questo piano β ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dove O è il punto di incidenza del raggio luminoso sulla superficie α, l'asse x è la retta comune ai due piani α e β e l'asse y è la retta perpendicolare in O al piano α (figura 1).

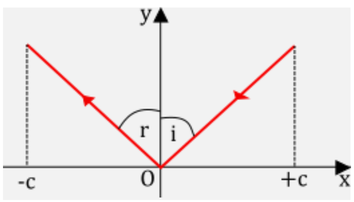

figura 1

È noto dalla Fisica che il raggio luminoso si riflette, viaggiando sempre nel piano β, con un angolo di riflessione r uguale all'angolo di incidenza i.

Costatato ora che la pendenza m del raggio incidente è la seguente:

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{1}{\tan i},$$

e costatato inoltre che la pendenza del raggio riflesso è $-m$, ne consegue che il percorso del raggio luminoso, in un intervallo $[-c, +c]$, essendo c un parametro reale positivo, è definito dalla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} mx & \text{per} \quad 0 \le x \le +c \\ -mx & \text{per} \quad -c \le x < 0 \end{cases}$$

Si tratta evidentemente di una funzione definita, continua e derivabile nell'intervallo $[-c, +c]$, eccezion fatta per il punto 0, dove, pur essendo definita e continua, non è derivabile.

Il punto 0 è un punto singolare. In esso il raggio luminoso subisce una rapida variazione della direzione di propagazione, ma, continuando a propagarsi nello stesso mezzo, mantiene la stessa velocità.

4. Il secondo esempio riguarda il percorso di un raggio luminoso monocromatico (per esempio luce rossa) che, viaggiando in un mezzo trasparente (per esempio aria) incide sulla superficie piana α di separazione del primo mezzo da un secondo mezzo anch'esso trasparente (per esempio acqua).

Con considerazioni analoghe alle precedenti, ma con le necessarie modifiche, la situazione può essere rappresentata come in figura 2.

È noto che il raggio luminoso, incidendo con un angolo i, si rifrange, continuando a viaggiare nel piano β, con un angolo di rifrazione r tale che risulti soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

dove v_1, v_2 sono le velocità di propagazione del raggio luminoso rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo.

Quando $v_1 > v_2$ (come nel caso nostro – figura 2), per cui $i > r$, il raggio rifratto tende ad avvicinarsi alla normale y.

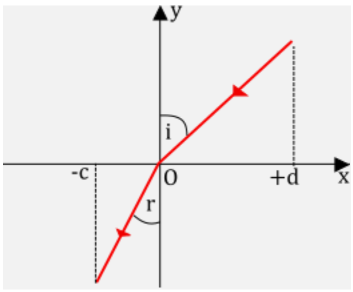

figura 2

Appurato adesso che la pendenza m_1 del raggio incidente e la pendenza m_2 del raggio rifratto sono nell'ordine:

$$m_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{1}{\tan i}, \qquad m_2 = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - r\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = \frac{1}{\tan r}.$$

Si desume che il percorso del raggio luminoso, in un intervallo $[-c, +d]$, essendo c, d parametri reali positivi, è definito dalla seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x & \text{per} \quad 0 \le x \le +d \\ m_2 x & \text{per} \quad -c \le x < 0 \end{cases}$$

Si tratta, come la precedente, di una funzione definita, continua e derivabile nell'intervallo $[-c, +d]$, eccezion fatta per il punto 0, dove, pur essendo definita e continua, non è derivabile.

Il punto 0 è un punto singolare. In esso il raggio luminoso, penetrando nel secondo mezzo, subisce una rapida variazione non solo della direzione di propagazione ma anche della sua velocità.

5. I due prossimi esempi descrivono due aspetti, uno inverso dell'altro, di uno stesso fenomeno. Sono mutuati, uno in particolare, da Aleksandrov-Kolmogorov-Laurent'ev, *Le Matematiche*, Torino, Universale scientifica Boringhieri, Ristampa 1977, pag. 9.

Descriviamo dunque questi esempi.

È noto dallo studio della Fisica che, se ad 1 kg di acqua (o meglio di ghiaccio) a -10°C ed alla pressione ordinaria (1 atmosfera) viene somministrata costantemente la stessa quantità di calore, la temperatura T del ghiaccio aumenta proporzionalmente alla quantità Q di calore assorbito fino a 0°C, dove si mantiene costante finché tutto il ghiaccio non sia fuso (cioè è diventato acqua), per aumentare di nuovo proporzionalmente a Q, mettiamo fino a 10°C.

Quando il ghiaccio si riscalda fino a 0°C, la legge che esprime Q in funzione di T e quella che esprime T in funzione di Q sono nell'ordine le seguenti:

$$Q \;=\; m\,c\,(T+10)\,, \qquad T = \frac{Q}{m\,c} - 10\,,$$

dove m è la massa di ghiaccio (nel caso specifico: $m = 1$ kg) e c è il suo calore specifico (nel nostro caso: $c = 0{,}5\,\frac{\text{kcal}}{°\text{C}\cdot\text{kg}}$) e dove si è supposto che a -10°C il ghiaccio non avesse assorbito ancora alcuna quantità di calore. Per cui, nel caso particolare considerato, si ha:

$$Q \;=\; 0{,}5\,T \;+\; 5 \;\text{ per }\; -10 \le T < 0\,, \qquad T = 2\,Q - 10 \;\text{ per }\; 0 \le Q < 5.$$

Durante la fusione del ghiaccio, la temperatura T si mantiene costantemente uguale a 0°C, mentre si ha:

$$Q = m\,c_f + Q_0',$$

dove $c_f = 80\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ è il calore di fusione del ghiaccio e Q_0'=5 kcal è la quantità di calore già assorbita. Per cui si ha: Q =85 kcal per $T = 0$.

Dopo che tutto il ghiaccio è fuso, la temperatura del corpo (che adesso è allo stato liquido) riprende a salire con questa legge:

$$Q = m\,c\,T + Q_0'',$$

dove ora il calore specifico dell'acqua è $c = 1\,\frac{\text{kcal}}{°\text{C}\cdot\text{kg}}$ e $Q_0'' = 85$ kcal è la quantità di calore già assorbita. Per cui risulta:

$$Q \;=\; T \;+\; 85 \;\text{ per }\; 0 \le T \le 10, \qquad T = Q - 85 \;\text{ per }\; 85 \le Q \le 95.$$

In sintesi, T, espressa in gradi centigradi (°C), varia in funzione di Q, espresso in chilocalorie (kcal), in base alla seguente legge (figura 3):

$$T(Q) = \begin{cases} 2\,Q - 10 \;\text{ per }\; 0 \le Q < 5 \\ 0 \;\text{ per }\; 5 \le Q < 85 \\ Q - 85 \;\text{ per }\; 85 \le Q \le 95 \end{cases}$$

Mentre Q varia in funzione di T in base alla seguente legge (figura 4):

$$Q(T) = \begin{cases} 0{,}5\,T + 5 \;\text{ per } -10 \le T < 0 \\ T + 85 \;\text{ per }\; 0 \le T \le 10 \end{cases}$$

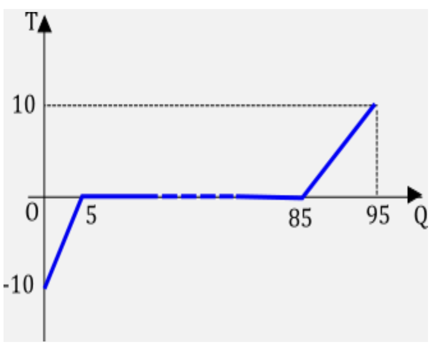

figura 3

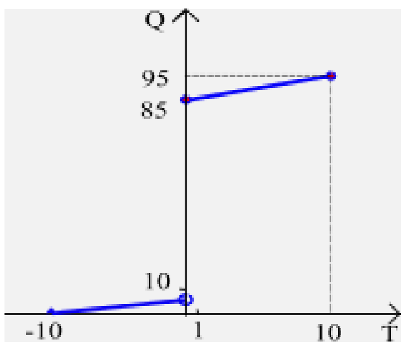

figura 4

La prima legge è rappresentata da una funzione continua nell'intervallo $[0, 95]$ e derivabile in questo intervallo, eccezion fatta per i punti $Q = 5$ e $Q = 85$, corrispondenti ai cambiamenti di stato della sostanza.

La seconda legge è rappresentata da una funzione definita nell'intervallo di temperatura $[-10,10]$, ma continua a tratti in questo intervallo. Essa presenta esattamente una discontinuità non eliminabile nel punto $T = 0$ dove Q subisce un salto.

6. Un nuovo esempio. Consideriamo il campo elettrico generato da una sfera di raggio r, costituita da materiale conduttore, sulla quale sia distribuita una carica elettrica (ovviamente in maniera uniforme e solo sulla superficie, e questo sia se la sfera è cava sia se è piena). Ebbene, l'intensità E del campo, calcolato in un determinato punto P, varia in funzione della distanza x del punto dal centro della sfera. Precisamente esso è 0 fintantoché il punto P è situato all'interno della sfera e, con un salto, diventa k/x^2 quando P si trova sulla superficie sferica o all'esterno, essendo k una costante che dipende dal mezzo in cui è posta la sfera oltre che dalla quantità di carica elettrica distribuita sulla sua superficie. Per cui E varia in funzione di x secondo la seguente legge:

$$E = \begin{cases} 0 \ \text{ per } \ 0 \le x < r \\ \dfrac{k}{x^2} \ \text{ per } \ x \ge r \end{cases}$$

Anche adesso ci troviamo in presenza di una funzione definita nell'intervallo $[0, +\infty[$, ma continua a tratti in questo intervallo. Esattamente essa presenta una discontinuità non eliminabile nel punto $x = r$, dove E subisce un salto (figura 5). Nel punto 0, ovviamente, la funzione è continua solo a destra.

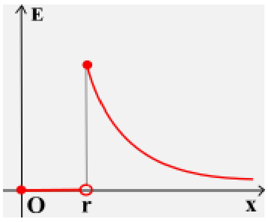

figura 5

7. Un altro esempio. Supponiamo che in un recipiente (figura 6) siano contenuti due liquidi non mescolabili e perciò aventi diverso peso specifico, per esempio acqua (peso specifico γ_1) e mercurio (peso specifico γ_2), per cui $\gamma_1<\gamma_2$. L'acqua occupi il recipiente per un'altezza h_1; il mercurio per un'altezza h_2. La pressione p esercitata su un piano orizzontale all'interno del liquido contenuto nel recipiente dipende dalla distanza H di questo piano dalla superficie libera del liquido, dove l'atmosfera esercita la pressione p_0.

Un grafico (figura 6), evidenziando la variazione di p al variare di H, mostra pure che nel passaggio dall'acqua al mercurio c'è un cambiamento di pressione.

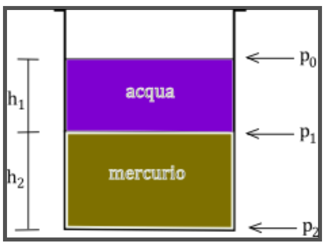

figura 6

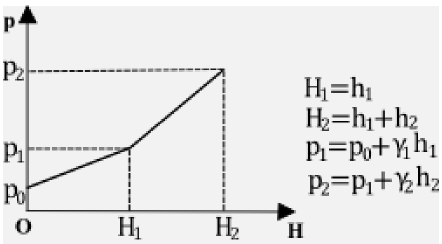

figura 7

La funzione che descrive l'andamento della pressione da $H = 0$ ad $H = h_1 + h_2$ è la seguente (figura 7):

$$p(H) = \begin{cases} p_0 + \gamma_1 H \ \text{ per } \ 0 \le H < h_1 \\ p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 (H - h_1) \ \text{ per } \ h_1 \le H \le h_1 + h_2 \end{cases}$$

Si tratta chiramente di una funzione definita, continua e derivabile nell'intervallo $[0, h_1 + h_2]$, ad eccezione del punto h_1, dove, pur essendo definita e continua, non è derivabile. Il punto è un punto singolare. In questo punto la pressione subisce una rapida variazione. Naturalmente per punto 0 la funzione è derivabile solo a destra.

8. Un ultimo esempio. Sappiamo, dalla Fisica, che un circuito elettrico con una resistenza R e un'induttanza L, soggetto ad una forza elettromotrice costante V, è attraversato da una corrente elettrica di intensità costante $I = V/R$. Tuttavia, all'atto della chiusura del circuito (figura 8 – un apposito commutatore viene portato in A) e a quello dell'apertura del circuito (il commutatore è trasferito motlo rapidamente in B), l'intensità di corrente I è variabile.

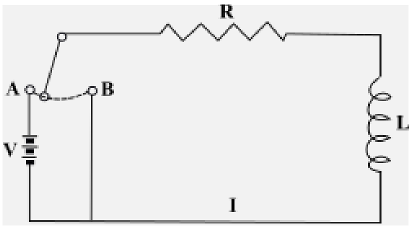

figura 8

Precisamente, lo studio della Fisica insegna che alla chiusura del circuito si ha:

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

dove "e" è la costante di Nepero: si parla di *extracorrente di chiusura* del circuito.

Si suppone che sia 0 l'istante in cui si chiude il circuito.

Invece, all'apertura si ha:

$$I = \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}:$$

si parla di *extracorrente di apertura* del circuito.

Si suppone che sia 0 l'istante in cui si apre il cicrcuito.

In teoria, in base alle due leggi, alla chiusura del circuito la corrente dovrebbe raggiungere il valore di regime V/R dopo un tempo t infinito e all'apertura dovrebbe passare dal valore di regime V/R a 0 in un tempo t infinito.

Nella pratica questi fatti accadono in una frazione di secondo.

A titolo di esempio, supponiamo che sia $R = 50\ \Omega$ e $L = 2{,}5\ H$ (Ω – *ohm* – e H – *henry* – sono le unità della resistenza e dell'induttanza nel sistema di misura internazione (S.I.), nel quale la corrente è misurata in *ampère* (A)). Supponiamo inoltre che sia $V = 100\ V$ (V – *volt* – è l'unità di misura della f.e.m.). Si ha pertanto: $V/R = 2A$ e $R/L = 20\ s^{-1}$. Cosicché, alla chiusura del circuito e alla sua apertura si ha rispettivamente:

$$I = 2\,(1 - e^{-20\,t}), \qquad I = 2\,e^{-20\,t}.$$

Si ribadisce che si assume uguale a 0 sia l'istante in cui si chiude il circuito sia quello in cui si apre.

Nella figura sottostante (figura 9) è rappresentato l'andamento dell'intensita di corrente I al variare del tempo t, dall'istante in cui si chiude il circuito a qualche frazione di secondo dopo l'istante t_0 in cui si apre il circuito stesso. Il valore $I = 2\ A$ è quello della corrente di regime.

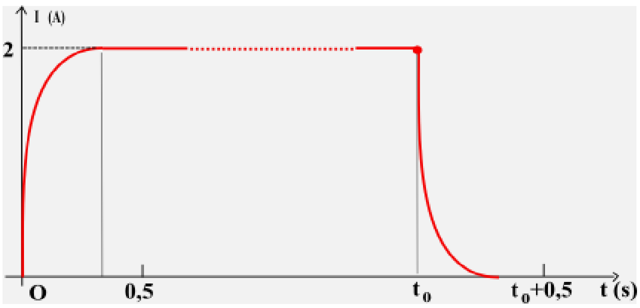

figura 9

Alla chiusura del circuito il valore di regime viene praticamente raggiunto dopo 0,3 s, così come all'apertura l'intensità della corrente passa dal valore di regime a 0 nello stesso intervallo di tempo di $0{,}3\ s$.

Si osserva infatti che si ha: $e^{-20\times 0{,}3} \approx 0{,}002$.

Per cui, alla chiusura, dopo 0,3 secondi, si ha: $I = 2\,(1 - 0{,}002) = 1{,}996$, mentre all'apertura, dopo 0,3 secondi, si ha: $I = 2\ \cdot 0{,}002 = 0{,}004$.

Mentre alla chiusura del circuito l'ntensità di corente arriva gradualmente al valore di regime, ancorché in una frazione di secondo, per cui non ci sono singolarità, all'apertuira dello stesso c'è effettivamente un brusco cambiamento del valore di I. Si nota infatti nel grafico (figura 9) proprio un punto singolare dell'andamento dell'intensità di corrente, esattamente nell'istante t_0 in cui si esclude il generatore, quando il commutatore è trasferito (molto rapidamente) da A a B (figura 8). Adesso, chiaramente, t_0 non può essere assunto uguale a 0.

Comunque, chiarisce tutto ciò la seguente funzione, la quale esprime l'andamento dell'intensità di corrente:

$$I(t) = \begin{cases} 2\,(1 - e^{-20\,t}) & \text{per} \quad 0 \le t \le t_0 \\ 2\,e^{-20\,(t-t_0)} & \text{per} \quad t > t_0 \end{cases}$$

Si può costatare che la funzione $I(t)$ è derivabile per $t > 0$, tranne che nel punto t_0. Infatti, a sinistra di questo punto si ha $I'({t_0}^-) = 40\,e^{-20\,t_0}$, mentre a destra si ha $I'({t_0}^+) = -40$.

Ovviamente, nel punto 0 la funzione è derivabile solo a destra e si ha precisamente: $I'(0^+) = 40$.

9. L'argomento trattato in questo articolo è un caso particolarmente semplice, fornito a beneficio degli studenti liceali, di un fenomeno molto più generale che interessa sia la Matematica sia le scienze sperimentali (Fisica, Chimica, …). Interessa pure quelle che alcuni definiscono pseudo-scienze (Sociologia, Psicologia, …).

Questo fenomeno è caratterizzato da un concetto mutuato dalla Matematica, che è chiamato per l'appunto ***singolarità***.

Uno studio generale delle singolarità dei fenomeni esula dai nostri compiti.

Ci limitiamo a riportare al riguardo un pensiero dovuto a James Clerk Maxwell, fisico e matematico scozzese (1831-1879), celebre per aver unificato precedenti osservazioni sperimentali e relative equazioni riguardanri il campo elettrico e il campo magnetico, concependole come manifestazioni di una medesima entità, il campo elettromagnetico. Maxwell pervenne a questa unificazione mediante quattro celebri equazioni differenziali alle derivate parziali, dette appunto *equazioni di Maxwell*, ed elaborò così la prima teoria moderna dell'elettromagnetismo.

Ebbene Maxwell, pur con parole diverse, esprime sostanzialmente questo concetto: nei pressi di una singolarità di un fenomeno è impossibile prevedere l'evoluzione del fenomeno, dal momento che piccole variazioni della variabile indipendente della funzione che descrive il fenomeno possono provocare variazioni molto grandi della variabile dipendente.