Si risolve un problema utilizzando un problema già noto.

di Antonino Giambò

1. Scrive il matematico ungherese George Polya (1887-1985), con riferimento alla risoluzione di un problema [3, pagg. 117-118]:

« *Può accadere di aver già risolto il problema, oppure di averne avuto qualche conoscenza anteriore, oppure di conoscere un problema molto simile ad esso. Sono queste eventualità che non si dovrebbero trascurare. Si cerchi sempre di ricordare le esperienze trascorse.* Questo problema è già noto? Oppure lo stesso problema si è già presentato sotto un aspetto leggermente diverso? *Anche se le risposte sono negative, proprio da tali domande può prendere avvio il meccanismo di mobilitazione di tutte le conoscenze già acquisite che possono rivelarsi utili. …*

« *… un problema la cui soluzione sia nota e che risulti connesso con quello proposto è senza dubbio sempre ben accetto. Ed esso risulta ancora più gradito se il legame che presenta con quello in esame è molto profondo e la sua risoluzione non è troppo laboriosa*.»

Orbene, nella risoluzione dei problemi che vado a proporre, problemi già noti costituiscono esattamente il punto di partenza e il veicolo fondamentale per la risoluzione dei problemi medesimi.

2. PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva γ di equazione $y = 1 - x^{2n}$, dove n è un intero positivo.

1) Si dicano M ed N i punti in cui γ interseca l'asse x e si dimostri che non interseca l'asse x in altri punti. Si dimostri pure che la curva presenta un massimo assoluto nel punto P in cui interseca l'asse y.

2) Si indichi con A l'area compresa fra la curva e l'asse x, con T l'area del triangolo delimitato dall'asse x e dalle tangenti a γ nei punti M ed N, con R l'area del rettangolo di dimensioni MN e OP, e si calcolino le tre aree.

RISOLUZIONE.

Riguardo al punto 2) conosciamo un problema simile e lo conosciamo da secoli, dal tempo di Archimede (287 circa – 212 a.C.). Anzi, il problema risolto da Archimede è addirittura un caso particolare del nostro problema, che pertanto è una generalizzazione di quell'altro.

Il grande scienziato siracusano lo risolvette usando un "metodo meccanico" di sua invenzione, che gli permise di trovare la soluzione, che poi dimostrò rigorosamente con il "metodo di esaustione". Riuscì così a risolvere il problema nel caso in cui la curva assegnata era una parabola.

Noi, avendo a disposizione strumenti d'indagine ben più sofisticati di quelli che possedeva Archimede, possiamo servirci di questi strumenti e in particolare dell'Analisi Matematica. Possiamo trovare così, in modo abbastanza rapido, che, con riferimento alla parabola di equazione $y = 1 - x^2$ (figura 1), risulta:

$$A=\frac{4}{3}\ ,\ \ T=R=2\ .$$

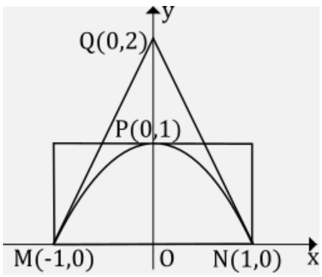

figura 1

L'aspetto interessante è che questo stesso strumento possiamo utilizzare anche per risolvere il problema proposto.

- Ma procediamo con ordine, incominciando a occuparci del punto 1), dopo aver costatato che la curva γ è simmetrica rispetto all'asse y, essendo chiaramente $y(-x) = y(x)$.

Le coordinate dei punti M ed N si trovano rapidamente: $M(-1, 0), N(1,0)$.

Riguardo al punto P, in cui la curva interseca l'asse y, osserviamo che si ha P(0,1). Per dimostrare che in tale punto la curva presenta un massimo assoluto, calcoliamo la derivata di y: $y' = -2n\, x^{2n-1}$. Evidentemente: y'=0 per x=0, y'>0 per x<0 e y'<0 per x>0. Cosicché la curva è crescente a sinistra di P ed è decrescente a destra. Il che autorizza ad affermare che il punto P(0,1) è un punto di massimo assoluto.

Non solo, ma autorizza anche a concludere che la curva non interseca in altri punti l'asse x.

- Passiamo al punto 2) e calcoliamo l'area A compresa fra la curva e l'asse x:

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^{2n})\, dx = \left[x - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = 2 - \frac{2}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}.$$

L'area R del rettangolo si trova immediatamente:

$$R = \overline{MN} \cdot \overline{OP} = 2 \cdot 1 = 2\,.$$

Riguardo all'area del triangolo, troviamo le equazioni delle rette tangenti alla curva nei punti M ed N. Osserviamo al riguardo che si ha: $y'(-1) = 2n$, $y'(1) = -2n$. Pertanto le tangenti nei punti M ed N hanno rispettivamente le seguenti equazioni:

$$y = 2n\,(x+1), \quad y = -2n\,(x-1).$$

Si trova agevolmente il loro punto comune: $Q(0, 2n)$. Si desume che l'area del triangolo è:

$$T = \frac{1}{2}\, \overline{MN} \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2n = 2n\,.$$

Nel caso particolare in cui la curva γ è una parabola, per cui n=1, si ritrovano i valori già indicati:

$$A = \frac{4}{3}\ , T = R = 2\,.$$

3. PROBLEMA 2.

Calcolare il limite della successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}\,.$$

RISOLUZIONE.

Bisogna trovare un'espressione di a_n che, a differenza di quella assegnata, consenta di calcolarne il limite.

Conosciamo un problema simile. Lo conosciamo fin dai tempi di Pietro Mengoli (sacerdote e matematico bolognese, 1625-1686), ideatore della successione – denominata *successione di Mengoli* – di termine generale b_n tale che:

$$b_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)}\,.$$

È chiaro che si ha:

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,.$$

In base a questa formula si trova facilmente il termine generale della successione di Mengoli:

$$b_n = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Andando allora alla successione assegnata, vi accade qualcosa di simile. Si ha infatti:

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}\,.$$

Cosicché, utilizzando la formula ottenuta: $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, si ottiene l'espressione cercata. Infatti:

$$a_n = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right),$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

L'espressione ottenuta è buona per calcolarne il limite. Si ha infatti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 .$$

4. PROBLEMA 3.

n palline sono distribuite casualmente in k scatole, con $2 \le n \le k$. Calcolare la probabilità che:

1) scelta a caso una delle n palline, la scatola che la contiene contenga almeno un'altra pallina;
2) esista almeno una scatola contenente più di una pallina.

RISOLUZIONE.

Una rapida analisi fa comprendere che si tratta di due quesiti completamente diversi.

La risoluzione del primo si presenta abbastanza semplice.

Quella del secondo lo è un po' meno, ma è decisamente facilitata dal fatto che conosciamo un problema simile, molto simile. È noto come *problema del compleanno* e fu proposto per la prima volta nel 1939 dallo scienziato austriaco Richard Von Mises (1883-1953). Vedremo come utilizzare questa conoscenza.

Nella risoluzione di entrambi i punti conviene calcolare dapprima la probabilità contraria P' di quella che ci interessa P, cosicché si ha P = 1 – P'.

- Ci occupiamo intanto della risoluzione del punto 1).

Scelta a caso una delle n palline e appurato che si trova nella scatola S, la probabilità che, fra le altre $n-1$ palline, nessuna si trovi nella medesima scatola S, in virtù della regola del prodotto è evidentemente:

$$P'(n,k) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}.$$

La probabilità contraria – vale a dire la probabilità che nell'urna S ci sia almeno un'altra pallina, oltre a quella che era già stato stabilito che ci fosse – è dunque:

$$P(n,k) = 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}.$$

Una tabella (tabella 1) mostra alcuni esempi nel caso in cui sia $k=100$. Oltre ai casi in cui risulta $2 \le n \le 100$, sono indicati anche due casi in cui le palline sono più di 100.

n	10	50	69	70	100	300	500
P (n, 100)	0,0864	0,3888	0,4951	0,5001	0,6302	0,9504	0,9933

tabella 1

Un grafico evidenzia meglio l'andamento di P(n,100) al variare di n (figura 2). Il grafico si estende anche oltre il caso che sia $n \ge 100$.

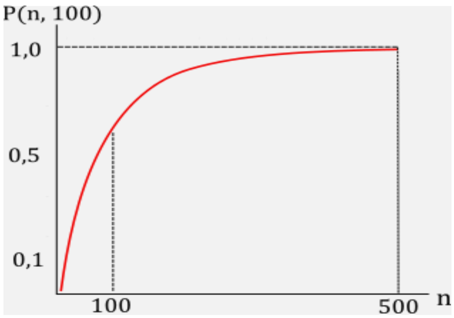

figura 2

Si può notare, in particolare dalla tabella, che sono necessarie ben 70 palline per avere più probabilità che si verifichi l'evento (nella scatola S è contenuta almeno un'altra pallina oltre a quella che già c'era) piuttosto che non si verifichi.

Si può costatare inoltre che, se le palline sono 100, cioè tante quante le scatole, allora è del 63,02% la probabilità di trovare nella scatola S un'altra pallina oltre a quella originaria. È una probabilità abbastanza alta, ma siamo lontani dalla certezza.

Certezza che, a rigor di logica, non si ha neppure se le palline sono addirittura 500, nel qual caso la probabilità è del 99,33%, cioè molto vicina alla certezza.

- Passiamo alla risoluzione del punto 2).

Prendiamo una qualunque delle n palline: la probabilità che essa si trovi in una delle k scatole, ma senza precisare quale, è chiaramente 1. In effetti, quella pallina in qualche scatola deve pur trovarsi. Indichiamo con S_1 questa scatola.

Prendiamo adesso una seconda pallina, diversa dalla precedente e calcoliamo la probabilità che si trovi nella stessa scatola S_1. Di casi possibili ce ne sono evidentemente k, tante quante sono le scatole, ma di casi favorevoli ce n'è uno soltanto, che la seconda pallina si trovi nella scatola S_1. La probabilità che si verifichi la coincidenza di trovare la seconda pallina nella stessa scatola in cui si trova la prima è quindi $\frac{1}{k}$. Invece la probabilità contraria, cioè la probabilità che quella coincidenza non si verifichi, è $1-\frac{1}{k}$. Supponiamo allora che la seconda pallina si trovi in una scatola diversa dalla S_1: denominiamo S_2 questa scatola (figura 3).

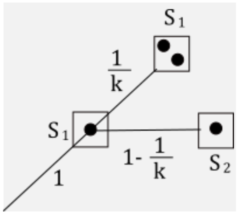

figura 3

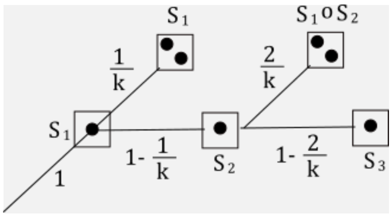

figura 4

Prendiamo adesso una terza pallina e calcoliamo la probabilità che si trovi in una delle due scatole S_1 o S_2. I casi possibili sono sempre k, ma quelli favorevoli adesso sono 2. Quindi la probabilità che la terza pallina si trovi in una di quelle due scatole è adesso $^2/_k$. La probabilità che questo non accada e che, pertanto, la terza pallina si trovi in un'altra scatola S_3, è $1-{}^2/_k$ (figura 4).

Dunque, la probabilità $P'(3, k)$ che, con 3 palline e k scatole, non vi sia più di una pallina in una medesima scatola è, per la regola del prodotto:

$$P'(3,k)=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right).$$

Continuando con lo stesso ragionamento (figura 5), si può calcolare la probabilità $P'(n, k)$ che, con n palline e k scatole, non vi sia più di una pallina nella stessa scatola. Questa probabilità è:

$$P'(n,k)=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{k}\right).$$

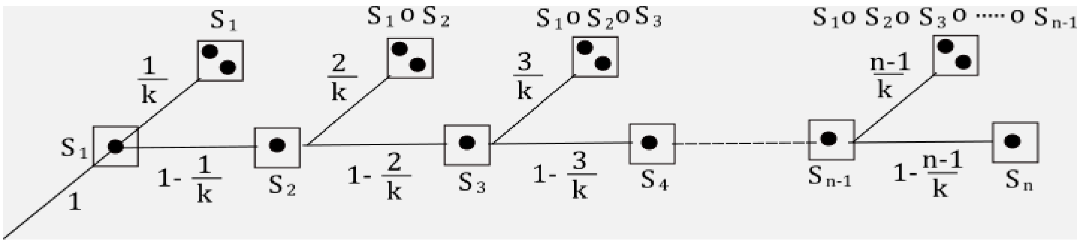

figura 5

Di conseguenza, la probabilità $P(n, k)$ che, con n palline e k scatole, con $2 \le n \le k$, esista una scatola contenente più di una pallina è $P(n, k) = 1 - P'(n, k)$, vale a dire:

$$P(n, k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right).$$

Anche adesso una tabella (tabella 2) registra alcuni esempi nel caso in cui sia k=100.

n	5	10	12	13	20	25	30
P (n, 100)	0,0965	0,3718	0,4958	0,5572	0,8696	0,9623	0,9922

tabella 2

E anche adesso un grafico (figura 6) evidenzia meglio l'andamento di P(n,100) al variare di n.

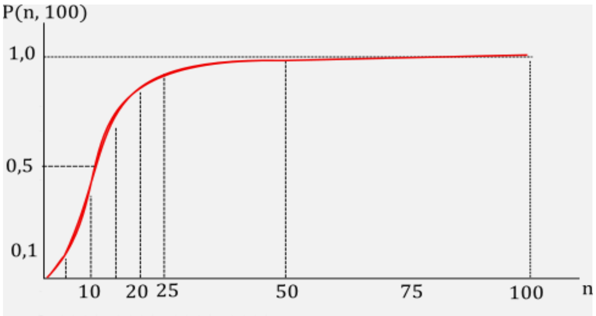

figura 6

Diversamente dal caso precedente, adesso bastano 13 palline per avere più probabilità che si verifichi l'evento (almeno due palline in una stessa scatola) piuttosto che non si verifichi. E con 30 palline si ha addirittura una probabilità del 99,22% che l'evento si verifichi.

Ovviamente se le palline sono in numero di 101, cioè una in più delle scatole, l'evento si verifica certamente, vale a dire che certamente c'è una scatola con almeno due palline.

Mi sembra espressivo un istogramma che evidenzi la situazione quando k=10 (figura 7). Esso è la rappresentazione grafica dei dati registrati nella tabella sottostante (tabella 3), ottenuti esplicitando la formula seguente:

$$P(n, 10) = 1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{2}{10}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{10}\right).$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	40	11
P(n, 10)	0,1000	0,2800	0,4960	0,6976	0,8488	0,9395	0,9819	0,9964	0,9996	1

tabella 3

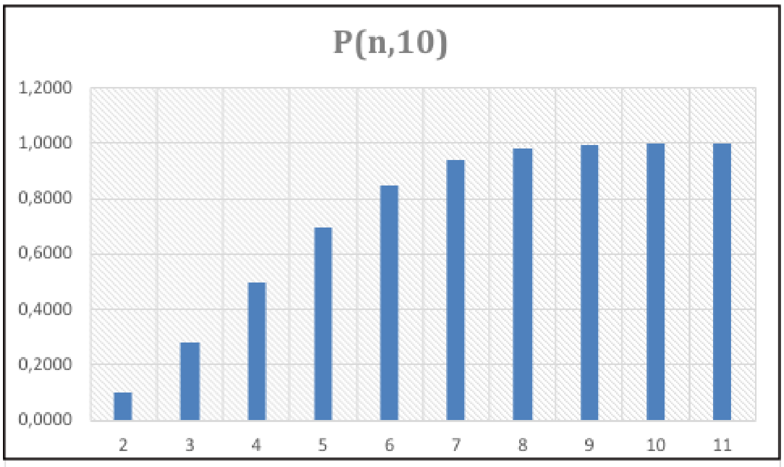

figura 7

Se poi vogliamo adattare la situazione al problema del compleanno, basta prendere $k=365$ (numero dei giorni di un anno non bisestile) e supporre che n sia il numero delle persone di una comunità ($2 \leq n \leq 365$) e valutare la probabilità che nella comunità ci siano due persone che festeggiano lo stesso compleanno. Si ha naturalmente:

$$P(n, 365) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Una tabella (tabella 4) registra alcuni risultati.

n	10	20	22	23	30	40	50
P (n, 365)	0,1170	0,4114	0,4757	0,5073	0,7063	0,8912	0,9704

tabella 4

Possiamo fare un paio di considerazioni. Con appena 23 persone si hanno più probabilità di trovarne due che festeggiano lo stesso compleanno. Con almeno 50 persone le probabilità tendono a differire così poco dall'unità, che si può parlare addirittura di certezza di trovare nella comunità due persone che festeggiano lo stesso compleanno. Ma queste sono cose che tutti, in realtà, già conoscono.

5. Un nuovo esempio è ripreso dall'articolo [2]. Si accenna ad una modalità idonea a costruire alcune di quelle che si possono denominare "n-uple pitagoriche primitive" a partire dalle conosciutissime "terne pitagoriche primitive".

In quell'articolo è spiegata una modalità particolare per ottenere terne pitagoriche primitive (a, b, c), con $a<b<c$. Riassumo: si prende un qualsiasi numero dispari $a \geq 3$ e si trovano le possibili coppie di numeri naturali coprìmi s, t, con $s<t$, tali che sia $a^2 = s\,t$; si pone quindi $c = \frac{t+s}{2}$, $b = \frac{t-s}{2}$.

Ora, se dal piano (spazio bidimensionale) ci spostiamo nello spazio tridimensionale e, di conseguenza, dall'ipotenusa c di un triangolo rettangolo di cateti a, b (e dunque: $a^2+b^2=c^2$) alla diagonale d di un parallelepipedo rettangolo di spigoli a, b, c, è noto che risulta:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 .$$

Ebbene, la costruzione di una quaterna – che possiamo denominare *quaterna pitagorica primitiva* – di numeri interi coprìmi (a, b, c, d), soddisfacenti alla precedente relazione non è altro che una ripetizione, con le ovvie modifiche, del procedimento descritto sopra per le terne pitagoriche primitive.

Precisamente: si parte da una terna pitagorica primitiva (a, b, h), quindi, assodato che il numero h è un numero dispari maggiore o uguale a 5, si trovano le possibili coppie di numeri coprìmi s, t, con $s<t$, tali che sia $h^2 = s\,t$; quindi si pone: $d = \frac{t+s}{2}$, $c = \frac{t-s}{2}$.

Per esempio, partendo dalla terna pitagorica primitiva (a, b, h), dove $a=3$, $b=4$, $h=5$, una volta costatato che $h^2=5^2=25\times1$, per cui $s=1$, $t=25$, si pone:

$$d = \frac{t+s}{2} = \frac{25+1}{2} = 13, \quad c = \frac{t-s}{2} = \frac{25-1}{2} = 12 .$$

Si ottiene così la quaterna pitagorica primitiva (3, 4, 12, 13). Di fatto:

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2 .$$

L'aspetto, ancora più interessante, è che lo stesso procedimento può essere esteso ad un qualunque iperspazio. Ma per questo rimando al già citato articolo [2].

Fornisco, tuttavia, un esempio relativo allo spazio a 4 dimensioni, descrivendo come si possa costruire una "cinquina pitagorica primitiva" (a, b, c, d, e).

Si parte dalla quaterna pitagorica primitiva (a, b, c, h), dove $a=3$, $b=4$, $c=12$, $h=13$, una volta costatato che $h^2=13^2=169\times1$, per cui $s=1$, $t=169$, si pone:

$$e = \frac{t+s}{2} = \frac{169+1}{2} = 85, \quad d = \frac{t-s}{2} = \frac{169-1}{2} = 84 .$$

Si ottiene così la cinquina pitagorica primitiva (3, 4, 12, 84, 85). Di fatto:

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2 .$$

Si può costatare che, considerata una qualsiasi n-upla pitagorica primitiva:

$$(a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_{n-1} , a_n),$$

oltre al fatto che la somma dei quadrati dei primi n−1 numeri è un quadrato perfetto (precisamente il quadrato dell'n-esimo numero), accade pure che, per ogni indice j, tale che sia $2 \leq j \leq n-2$, risulta che la somma dei quadrati dei numeri della successione $(a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_j)$ è essa pure un quadrato perfetto (vale a dire il quadrato di un numero naturale).

Non bisogna però pensare che quelle ottenute con il procedimento descritto sopra siano le uniche n-uple pitagoriche.

Ce ne sono altre, costruite con altri procedimenti, nelle quali però vien meno la proprietà sopra evidenziata.

Come, per esempio, le seguenti n-uple:

$$(2, 5, 14, 15); \qquad (2, 4, 5, 6, 9); \qquad (1, 2, 3, 5, 19, 20),$$

per le quali risulta nell'ordine:

$$2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2; \quad 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9^2; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 19^2 = 20^2 .$$

Oppure, ma detto solo per curiosità, come la seguente successione di 11 numeri:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 18, 41, 47),$$

per la quale risulta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 18^2 + 41^2 = 47^2.$$

E si potrebbe continuare all'infinito.

Ebbene, in tutte queste n-uple, la somma dei primi n−1 numeri è un quadrato perfetto, precisamente il quadrato dell'n-esimo numero, ma non accade che, per ogni indice j, tale che sia $2 \leq j \leq n-2$, risulti che la somma dei quadrati dei numeri della successione $(a_1 \ a_2 , a_3 , \ldots , a_j)$ sia essa pure un quadrato perfetto.

Per la cronaca, il criterio seguito per la ricerca di ciascuna di queste n-uple si può riassumere nella risoluzione, per valori interi positivi, della seguente equazione:

$$s + x^2 = y^2 ,$$

dove s è la somma dei quadrati di un qualsiasi numero di numeri interi positivi.

In particolare, con riferimento alle quattro precedenti successioni:

- nel 1° caso: $s = 2^2 + 5^2 = 29$;
- nel 2° caso: $s = 2^2 + 4^2 + 5^2 = 45$;
- nel 3° caso: $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 39$;
- nel 4° caso: $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 18^2 = 528$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Martin Aigner – Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, edizione italiana a cura di Alfio Quarteroni, Milano, Springer, 2006.

[2] Antonino Giambò – Domenico Lenzi, *Oltre le terne pitagoriche*, in Periodico di matematiche, n° 2, Mag-Ago 2008

[3] George Polya, *Come risolvere i problemi di matematica*, traduzione dall'inglese di Maria Spoglianti, Milano, Feltrinelli, quarta edizione, 1983.