Ancora sulla formula di Stirling

di Antonino Giambò

1. Nel precedente articolo [1] abbiamo visto come De Moivre trovò la seguente formula:

$$\mathrm{N}! = \mathrm{k}\,\sqrt{\mathrm{N}}\,\left(\frac{\mathrm{N}}{e}\right)^{\mathrm{N}},$$

ma senza riuscire a determinare il valore della costante reale k.

Una stima di questo valore fu invece trovata da Stirling, il quale dimostrò che:

$$\mathrm{k} \approx \sqrt{2\,\pi}\,.$$

Nell'articolo succitato non mi sono soffermato sulla dimostrazione di questo fatto. Mi propongo di farlo in questo contributo.

In realtà, di dimostrazioni ne esistono diverse e tutte più o meno complicate.

Ho optato per una dimostrazione abbastanza breve nella parte essenziale ma che chiama in causa diverse proprietà e risulta pertanto, a conti fatti, piuttosto lunga e richiede molta attenzione e concentrazione per essere compresa.

A differenza di altre dimostrazioni e nonostante le lungaggini accennate, la ritengo tuttavia alla portata di studenti liceali particolarmente interessati alle questioni matematiche.

Per comodità di esposizione premetto le proprietà fondamentali che saranno richiamate nella dimostrazione della determinazione della costante k e poi passerò a questa dimostrazione.

2. PREMESSA N° 1.

Alcuni richiami sulle successioni, utili per quanto diremo in seguito e che, a prescindere da questo argomento, dovrebbero comunque costituire patrimonio culturale degli studenti liceali.

Sia una successione di numeri reali $\{a_N\}$.

- La successione si dice *monotona strettamente decrescente* se, comunque si scelga l'indice N, risulta $a_N > a_{N+1}$.
- La successione si dice *limitata inferiormente* se esiste un numero reale a tale che, per ogni indice N, risulti $a_N \geq a$.
- Vale il seguente teorema.
  TEOREMA.
  Ogni successione di numeri reali, monotona strettamente decrescente e limitata inferiormente, ammette limite e quindi è convergente.

3. PREMESSA N° 2.

Consideriamo il seguente prodotto, denominato *prodotto infinito di Wallis* [2]:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\,n}{2\,n-1}\cdot\frac{2\,n}{2\,n+1}\right) = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot \dots .$$

Si ha:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\,n}{2\,n-1}\cdot\frac{2\,n}{2\,n+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Pure di questa dimostrazione esistono diverse versioni. Descrivo quella che ritengo più adeguata alla situazione.

Consideriamo dunque la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ e riflettiamo sui suoi zeri reali.

[1] Cfr.: Articolo *Formula di Stirling*.
[2] John Wallis, matematico inglese, 1617-1703

Essi sono quei numeri reali che annullano il numeratore $\sin x$ ma non il denominatore x e questi sono i numeri seguenti:

$$\pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \quad \dots, \quad \pm m\pi, \dots \,.$$

Cosicché, in virtù del teorema fondamentale dell'algebra, possiamo scrivere:

$$\frac{\sin x}{x} = h(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots\ (x-m\pi)(x+m\pi)\dots,$$

dove h è una costante da determinare.

Ora, mettendo in evidenza $-\pi$ nel fattore $x-\pi$, π nel fattore $x+\pi$, -2π nel fattore $x-2\pi$, 2π nel fattore $x+2\pi$, e così via, $-m\pi$ nel fattore $x-m\pi$, $m\pi$ nel fattore $x+m\pi$, eccetera, possiamo scrivere:

$$\frac{\sin x}{x} = h\left(-\pi\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\right)\left(\pi\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\right)\left(-2\pi\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\right)\left(2\pi\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\right)\cdots\left(-m\pi\left(1-\frac{x}{m\pi}\right)\right)\left(m\pi\left(1+\frac{x}{m\pi}\right)\right)\cdots.$$

E da qui segue:

$$\frac{\sin x}{x} = H\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots,$$

avendo posto $H = h(-\pi)(\pi)(-2\pi)(2\pi)(-3\pi)(3\pi)\cdots(-m\pi)(m\pi)\cdots$.

Osserviamo adesso che si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

D'altro canto, si ha pure:

$$\lim_{x\to 0}\left\{H\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots\right\} = H\,.$$

Di conseguenza: $H = 1$.

Risulta pertanto:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots\,.$$

In questa uguaglianza poniamo $x = \pi/2$. A conti fatti, posto $m = 2n$, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{4\cdot 1^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\cdots\,,$$

ossia:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{o anche:} \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2}\right).$$

Da cui segue immediatamente ciò che si voleva dimostrare e cioè che:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right).$$

4. PREMESSA N° 3.

Prendiamo adesso in considerazione il prodotto p_n dei primi n termini del prodotto di Wallis, ossia:

$$p_n = \prod_{h=1}^{n}\left(\frac{2\,h}{2\,h-1}\cdot\frac{2\,h}{2\,h+1}\right) = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(\frac{2\,n}{2\,n-1}\cdot\frac{2\,n}{2\,n+1}\right).$$

Risulta:

$$p_n = \frac{1}{2\,n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{\left((2\,n)!\right)^2}\,.$$

DIMOSTRAZIONE.

Si ha:

$$p_n = \prod_{h=1}^{n}\left(\frac{2\,h}{2\,h-1}\cdot\frac{2\,h}{2\,h+1}\right) = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(\frac{2\,n}{2\,n-1}\cdot\frac{2\,n}{2\,n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\,n}{2\,n-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2\,n}{2\,n+1}\right) =$$
$$= \frac{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1)} =$$
$$= \frac{2^n\cdot n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{(2^n\cdot n!)^2\cdot(2n+1)}{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)\big)^2}.$$

Ora, risulta:

$$3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1) = \frac{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+1)\big)\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}.$$

Si ha pertanto:

$$p_n = \frac{(2^n\cdot n!)^2\cdot(2n+1)}{\left(\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}\right)^2} = \frac{(2^n\cdot n!)^2\cdot(2n+1)\cdot(2^n\cdot n!)^2}{\big((2n+1)!\big)^2} = \frac{(2^n)^4\cdot(n!)^4\cdot(2n+1)}{\big((2n)!\cdot(2n+1)\big)^2} =$$
$$= \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{\big((2n)!\big)^2}.$$

c.v.d.

5. Premessa N° 4.

Tenendo presente la precedente conclusione e quanto dimostrato in premessa 2, possiamo concludere che risulta:

$$\lim\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{\big((2n)!\big)^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Da qui segue che:

$$\sqrt{\lim\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{\big((2n)!\big)^2}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{o anche} \quad \lim\sqrt{\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{n\cdot\big((2n)!\big)^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;$$

e ancora:

$$\lim\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\cdot\lim\sqrt{\frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{n\cdot\big((2n)!\big)^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{ovvero:} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\ ;$$

infine:

$$\lim\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Questa relazione è denominata *formula di Wallis*.

È fondamentale nella dimostrazione che ci accingiamo ad esporre.

6. Occupiamoci finalmente del risultato di Stirling, vale a dire che la costante k della formula di De Moivre è approssimativamente uguale a $\sqrt{2\pi}$.

Partiamo dal punto al quale era giunto De Moivre:

$$\mathrm{N}! = \mathrm{k}\sqrt{\mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{N}} \quad \text{per cui} \quad \mathrm{k} = \frac{\mathrm{N}!\,e^{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{N}}} \quad \text{o anche} \quad k = \frac{\mathrm{N}!\,e^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}},$$

e fermiamo la nostra attenzione sulla successione $\{\mathrm{a_N}\}$ tale che:

$$\mathrm{a_N} = \frac{\mathrm{N}!\,e^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}.$$

Ci proponiamo di dimostrare che si ha:

$$\lim \mathrm{a_N} = \sqrt{2\pi}.$$

- Dimostriamo anzitutto che la successione $\{a_N\}$ è convergente.

Intanto, è evidente che per $N \geq 1$ risulta $a_N \geq e$, per cui la successione è limita inferiormente.

Inoltre, sempre per $N \geq 1$, si ha:

$$\frac{a_N}{a_{N+1}} = \frac{\dfrac{N!\,e^N}{N^{N+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{(N+1)!\,e^{(N+1)}}{(N+1)^{(N+1)+\frac{1}{2}}}} = \frac{N!\,e^N}{N^N \cdot N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(N+1)^{N+1} \cdot (N+1)^{\frac{1}{2}}}{N! \cdot (N+1) \cdot e^N \cdot e} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{N+1}{N}\right)^N \cdot \left(\frac{N+1}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}}.$$

Ricordiamo adesso che, se y=x, con x>0, allora si ha pure: $y = e^{\ln x}$. Per cui risulta:

$$\frac{a_N}{a_{N+1}} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}.$$

Occupiamoci della successione $\{b_N\}$, tale che:

$$b_N = \left(N+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{N}\right).$$

Posto $N=1/x$, consideriamo la seguente funzione, correlata alla successione $\{b_N\}$:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x)\ , \quad \text{con } \ 0 < x \leq 1.$$

Si ha perciò:

$$\frac{a_N}{a_{N+1}} = \frac{1}{e} \cdot e^{f(x)}\ , \quad \text{con } \ 0 < x \leq 1\,.$$

Ora, magari attraverso il grafico della funzione $e^{f(x)}$, ottenuto con un idoneo strumento di calcolo automatico, si costata che la funzione è strettamente crescente per x>0 e, in particolare, lo è per 0<x≤1. Si costata inoltre che per questi valori di x risulta $e^{f(x)} > e$ (figura 1).

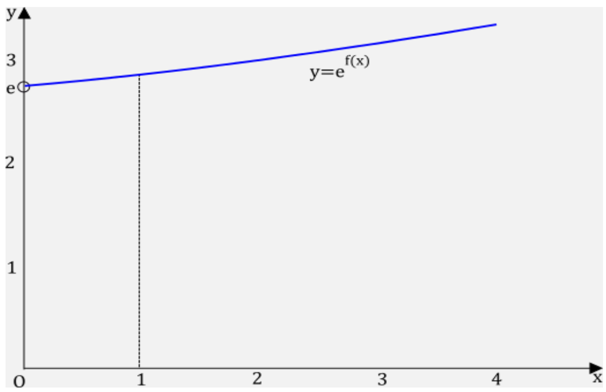

figura 1

Cosa, quest'ultima, che si può giustificare anche analiticamente.

Si ha, infatti:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} f(x)}\ ;$$

d'altro canto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right) = 1$$

e dunque:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{f(x)} = e\,.$$

Pertanto (ricordiamo che $e^{f(x)}$ è strettamente crescente):

$$e^{f(x)} > e \quad \text{per} \quad 0 < x \leq 1\,.$$

Di conseguenza:

$$\frac{a_N}{a_{N+1}} = \frac{1}{e} \cdot e^{f(x)} > \frac{e}{e} = 1\,.$$

Insomma, per $0<x\leq 1$ e quindi per $0<\frac{1}{N}\leq 1$ ossia per $N\geq 1$, risulta:

$$\frac{a_N}{a_{N+1}}>1 \quad \text{vale a dire} \quad a_N>a_{N+1}.$$

Si desume da ciò che la successione $\{a_N\}$ è monotona strettamente decrescente per $N\geq 1$.

Riepiloghiamo. La successione $\{a_N\}$ è una successione monotona strettamente decrescente e limitata inferiormente. Perciò (vedi teorema in premessa 1) è una successione convergente.

- La successione $\{a_N\}$ tale che:

$$a_N=\frac{N!\,e^N}{N^{N+\frac{1}{2}}}$$

è dunque una successione convergente.

Ovviamente, se al posto di N mettiamo 2N, per cui otteniamo la successione $\{a_{2N}\}$ tale che:

$$a_{2N}=\frac{(2N)!\,e^{2N}}{(2N)^{2N+\frac{1}{2}}},$$

anche questa successione è convergente e converge allo stesso limite dell'altra successione.

Ne consegue che si ha:

$$\lim a_N=\lim\frac{a_N\cdot a_N}{a_N} \quad \text{o anche} \quad \lim a_N=\lim\frac{a_N\cdot a_N}{a_{2N}} \quad \text{ossia:} \quad \lim a_N=\lim\frac{{a_N}^2}{a_{2N}}.$$

Cosicché risulta:

$$\lim a_N=\lim\frac{\left(\frac{N!\,e^N}{N^{N+\frac{1}{2}}}\right)^2}{\frac{(2N)!\,e^{2N}}{(2N)^{2N+\frac{1}{2}}}}=\lim\left(\frac{(N!)^2\cdot e^{2N}}{N^{2N+1}}\cdot\frac{(2N)^{2N+\frac{1}{2}}}{(2N)!\,e^{2N}}\right)=\lim\frac{(N!)^2\cdot(2N)^{2N}\cdot\sqrt{2N}}{N^{2N}\cdot N\cdot(2N)!}=$$

$$=\sqrt{2}\,\lim\frac{(N!)^2\cdot 2^{2N}\cdot N^{2N}}{N^{2N}\cdot\sqrt{N}\cdot(2N)!}=\sqrt{2}\,\lim\frac{(N!)^2\cdot 2^{2N}}{\sqrt{N}\cdot(2N)!}.$$

Ora, ricordando la formula di Wallis (vedi premessa 4), si ha:

$$\lim\frac{(N!)^2\cdot 2^{2N}}{(2N)!\,\sqrt{N}}=\sqrt{\pi},$$

per cui:

$$\lim a_N=\sqrt{2\pi}.$$

Come volevasi dimostrare.

- Si ha dunque:

$$\lim\frac{N!\,e^N}{N^{N+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi},$$

vale a dire:

$$\frac{N!\,e^N}{N^N\sqrt{N}}=\sqrt{2\pi} \quad \text{per } N\to\infty \quad \text{ossia} \quad N!\approx\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

E questo prova che risulta $k\approx\sqrt{2\pi}$, come per l'appunto trovato da Stirling.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Martin Aigner – Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK* (a cura di Alfio Quarteroni), Milano, Springer, 2006.

[2] Richard Courant – Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica*? , Torino, Bollati Boringhieri, seconda edizione, 2000.

[3] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.