LIMITATE CATENE DEDUTTIVE
Quesito 9– Sessione ordinaria 2012

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r.
Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Cominciamo con l'osservare che il cammino minimo che congiunge A con B, toccando r in un punto C, non può che essere una spezzata composta da due segmenti, infatti

- I cammini che minimizzano le distanze sono segmenti
- Qualunque cammino che congiunge A e B toccando r è l'unione dei due cammini parziali, che congiungono A e C e poi C e B
- I cammini parziali sono minimi se e solo se sono segmenti

Inoltre, il punto C deve cadere all'interno del segmento EF , proiezione di AB su r (i*nfatti, ogni percorso corrispondente a un punto che cada agli estremi di EF o all'esterno di esso, si può far corrispondere un percorso di lunghezza minore corrispondente a un punto interno)*

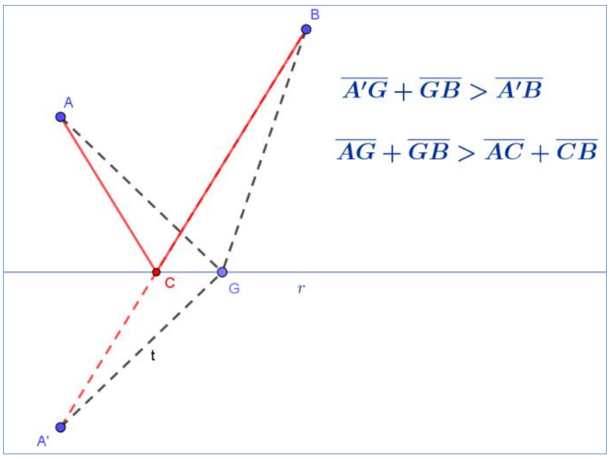
Soluzione geometrica

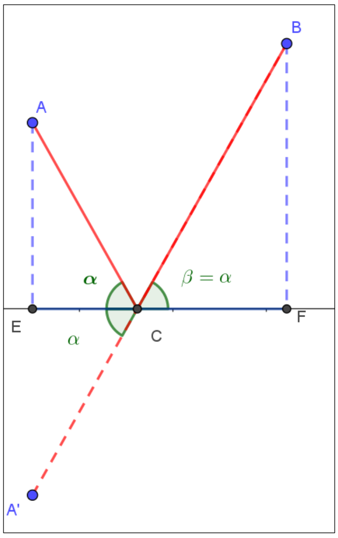
Prerequisiti

- Distanza tra due punti e disuguaglianza triangolare
- Il segmento di retta come percorso minimo che congiunge due punti
- Simmetria rispetto a una retta
- Similitudine fra i triangoli

Per trovare il percorso più breve ricorriamo a una costruzione geometrica.

- Si costruisce il punto A' simmetrico di A rispetto alla retta r e si congiunge A' con B
- il percorso più breve per andare da A' a B coincide col segmento $A'B$
- Se C è il punto in cui $A'B$ incontra la retta r, i segmenti AC e $A'C$ sono tra loro congruenti, pertanto la spezzata ACB è il cammino minimo che congiunge A con B toccando r.





Il punto C che rende minimo il percorso è anche l'unico punto della retta r tale che i segmenti AC e CB formano angoli uguali con la retta stessa
La posizione di C si deduce dalla similitudine dei triangoli AEC e BFC

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Metodo analitico

Prerequisiti
Ricerca del minimo di una funzione derivabile in un intervallo assegnato

In un riferimento cartesiano in cui la retta r coincida con l'asse delle ascisse, siano $A(x_a; y_a)$ e $B(x_b; y_b)$ due punti del primo quadrante.

Indicato $C(x; 0)$ un punto di r tale che $x_a \leq x \leq x_b$ si cerca il minimo della funzione

$$f(x) = \sqrt{(x-x_a)^2 + y_a^2} + \sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2} \quad \text{con le condizioni} \begin{cases} x - x_a & > 0 \\ x_b - x & > 0 \\ y_a & > 0 \\ y_b & > 0 \end{cases}$$

Sii studia il segno di $f'(x) = \frac{x-x_a}{\sqrt{(x-x_a)^2+y_a^2}} + \frac{x-x_b}{\sqrt{(x_b-x)^2+y_b^2}}$

$$f'(x) \geq 0 \to \frac{x-x_a}{\sqrt{(x-x_a)^2+y_a^2}} \geq \frac{x_b - x}{\sqrt{(x-x_b)^2+y_b^2}}$$

Essendo positivi entrambi i membri della disuguaglianza possiamo scrivere

$$\frac{(x-x_a)^2}{(x-x_a)^2+y_a^2} \geq \frac{(x_b-x)^2}{(x-x_b)^2+y_b^2} \to$$

$$(x-x_a)^2(x-x_b)^2 + y_b^2(x-x_a)^2 \geq (x-x_a)^2(x-x_b)^2 + y_a^2(x-x_b)^2 \to$$

$$y_b^2(x-x_a)^2 \geq y_a^2(x_b-x)^2 \to |y_b(x-x_a)| \geq |y_a(x_b-x)|$$

Essendo positivi gli argomenti dei moduli

$f'(x) \geq 0$ se $y_b(x-x_a) \geq y_a(x_b-x)$ da cui

$$x \geq \frac{x_a y_b + x_b y_a}{y_a + y_b} = x_c$$

Poiché $f(x)$ decresce per $x < x_c$ e cresce per $x > x_c$

$x_c = \frac{x_a y_b + x_b y_a}{y_a + y_b}$ è l'ascissa del punto C per cui si ottiene il percorso minimo

Confronto tra i risultati ottenuti in ciascuno dei due metodi

Verifichiamo che

a) il punto $C(x_c, 0)$ divide il segmento EF in due parti tali che $\frac{\overline{EC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}$
   Infatti, se imponiamo che $\frac{x - x_a}{x_b - x} = \frac{y_a}{y_b}$ *troviamo* $x = \frac{x_a y_b + y_a x_b}{y_b + y_a} = x_c$

b) il punto $C(x_c, 0)$ è proprio il punto di incontro della retta $A'B$ con l'asse delle x

La retta A'B ha equazione $\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y + y_a}{y_b + y_a}$ *e il suo punto di incontro con l'asse x ha ascissa*

$$x = x_a + \frac{y_a(x_b - x_a)}{y_b + y_a} = \frac{x_a y_b + x_a y_a + y_a x_b - y_a x_a}{y_b + y_a} = \frac{x_a y_b + y_a x_b}{y_b + y_a} = x_c$$

c) Nei triangoli ACE e BCF, gli angoli $A\hat{C}E, F\hat{C}B$ sono tra loro congruenti, come suggerisce la rappresentazione geometrica

   Il valore x_c è l'ascissa del punto di minimo ed è, pertanto, soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$

$$f'(x_c) = 0 \rightarrow \frac{x_c - x_a}{\sqrt{(x - x_a)^2 + y_a^2}} = \frac{x_b - x_c}{\sqrt{(x - x_b)^2 + y_b^2}}$$

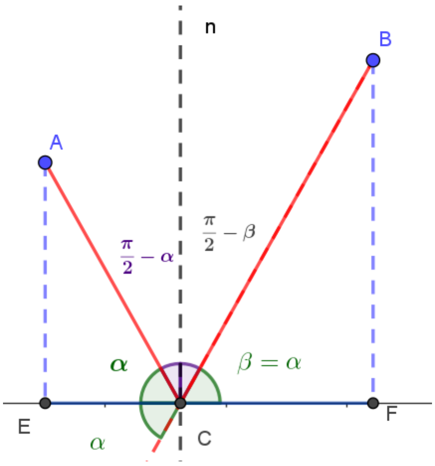
Poichè $\frac{x_c - x_a}{\sqrt{(x_c - x_a)^2 + y_a^2}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}$ e $\frac{x_b - x_c}{\sqrt{(x_c - x_b)^2 + y_b^2}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BC}}$ i due triangoli rettangoli AEC e BFC sono tra loro simili

Ritroviamo, pertanto, che il punto C è il punto della retta r tale che i segmenti AC e CB formano angoli acuti uguali con la retta stessa,

Approccio interdisciplinare
Le leggi della riflessione della luce

Riferimenti storici
Il quesito fa un riferimento specifico a un problema classico tratto dalla Catottrica, l'opera di Erone sugli specchi e sul comportamento della luce.

"Ciò che si muove con velocità costante si muove in linea retta" (Catrottica-II) I raggi emessi dai nostri occhi seguono la traiettoria rettilinea che rappresenta il percorso più breve congiungente due punti. Ma anche i raggi incidenti sugli specchi o sull'acqua e sulle superfici piane sono riflessi in modo da seguire il cammino più breve.
Pur nel contesto di teorie arcaiche sulla natura della luce e del meccanismo della visione, Erone utilizza un principio regolativo moderno, un principio variazionale .



Partendo dall'ipotesi che, nel propagarsi da un punto A a un punto B nello stesso mezzo, la luce sceglie il percorso più breve, risolve un interessante problema di ottimizzazione e dimostra la legge della riflessione: "l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione".

Per il principio del percorso minimo, se AC rappresenta un raggio di luce incidente su una superficie piana riflettente, CB sarà il raggio riflesso.
Si verifica facilmente che dalla costruzione effettuata si ricavano le leggi di Snellius- Cartesio:

- Il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale al piano riflettente , giacciono nello stesso piano
- L'angolo che il raggio incidente forma con la normale, è uguale all'angolo che il raggio riflesso forma con la stessa retta

Non è possibile , però, dimostrare sulla base dello stesso principio la legge della rifrazione .
Nel secolo XVII Fermat enunciò un principio più generale che riesce a spiegare sia il fenomeno della riflessione, sia quello della rifrazione

"La luce, nel propagarsi da un punto A a un punto B, sceglie i cammini continui che minimizzano il tempo di percorrenza"
Nel caso in cui la propagazione avviene nello stesso mezzo, quindi con la stessa velocità, il cammino di minor tempo coincide con il percorso più breve.
Se invece attraversa la superficie di separazione di due mezzi, la luce cambia velocità e la sua traiettoria non sarà rappresentata da un segmento, bensì da una spezzata,

Possibili approfondimenti
Il ruolo dei principi regolativi , dell'apparato matematico e dei risultati sperimentali nell'indagine scientifica
Le geodetiche in matematica, nella fisica classica e nella fisica moderna.