Dopo la “rivoluzione eliocentrica”, dovuta a Nicolò Copernico (1473-1543), il problema cinematico del moto planetario era già stato risolto da Johannes Kepler (1571-1630), che fra il 1609 e il 1619 enunciò le sue tre leggi:

I. *Le orbite descritte dai pianeti sono ellissi con il Sole in un fuoco.*
II. *Il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.*
III. *I quadrati dei tempi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.*

È da notare che le eccentricità delle orbite planetarie ad eccezione di quelle di Mercurio (e = 0,2056) e di Plutone (scoperto nel 1930, e = 0,2448), sono molto piccole [Venere e = 0,0068 (minima), Terra e = 0,0167]; quindi le ellissi si possono confondere in prima approssimazione con circonferenze.
Newton affrontò il problema dinamico nel III e ultimo libro dell’opera “Philosophiae naturalis principia mathematica” (Londini, 1687), partendo dall’ipotesi che la forza peso esercitata dalla Terra sia un caso particolare dell’attrazione gravitazionale universale che agisce fra due corpi qualsiasi. Dal moto dei pianeti egli potè ricavare la legge che descrive questa interazione, dimostrando che le leggi fisiche non valgono solo sulla Terra, ma governano anche i corpi celesti.
Come si è detto, le orbite dei pianeti attorno al Sole sono pressoché circolari. Newton aveva imparato da Christiaan Huygens (1629 - 1695) che in un moto circolare di raggio R e periodo T, l’accelerazione centripeta è

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \qquad (1)$$

Perciò la forza che il Sole esercitava su ogni pianeta si poteva scrivere

$$F = ma = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}, \qquad (2)$$

dove m è la massa del pianeta.
Facendo uso della terza legge di Kepler, si può però aggiungere che, per tutti i pianeti:

$$\frac{R^3}{T^2} = costante = k. \quad (3)$$

Sostituendo nella (2) si ha

$$F = 4\pi^2 k \frac{m}{R^2} = C \cdot \frac{m}{R^2}, \qquad (4)$$

dove la costante C, comune a tutti i pianeti, misura l’intensità del Sole come sorgente della forza che si esercita su di essi.
Newton credette che la dipendenza da $\frac{1}{R^2}$ fosse del tutto generale e applicabile alla forza che si esercitava fra due corpi qualsiasi e non solo fra Sole e pianeti. Inoltre pensò che la proprietà intrinseca che dava al Sole la possibilità di attirare gli altri corpi dipendesse dalla sua massa M_S e pose:

$$C = GM_S$$

dove G è una costante universale.
I risultati di NEwton si possono riassumere dicendo che:
Due punti materiali di massa m_1 e m_2, posti alla distanza r, si attirano reciprocamente con una forza - detta forza gravitazionale - il cui valore è:

$$Fgrav = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (5)$$

G è la costante di gravitazione universale.
Il valore di G, misurato per la prima volta nel 1798 dal chimico inglese Henry Cavendish (1731-1810), mediante la bilancia di torsione, è

$$G = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2. \qquad (6)$$

L'attrazione gravitazionale esplicata da un corpo sferico uniforme si manifesta come se l'intera massa del corpo fosse concentrata nel suo centro.
In Natura esistono solo quattro forze fondamentali: gravitazionale, elettrica, nucleare forte, e debole. La forza gravitazionale e la forza elettrica dipendono da $\frac{1}{r^2}$ e hanno "lungo raggio d'azione". La forza nucleare forte e la forza debole hanno un raggio d'azione massimo dell'ordine di $10^{-15}m$.

***

Come abbiamo visto, nelle sue prime ricerche, Newton considerò le orbite dei pianeti come circolari e giunse così, in modo piuttosto elementare, alla legge della gravitazione universale (5). Dopo aver compiuto questo primo passo, egli si accinse a un compito molto più difficile, quello di ricavare le leggi di Kepler dalla legge della gravitazione universale. Newton, per mezzo di una matematica più raffinata di quella di Kepler, arrivò alla conclusione generale che tutte le orbite dei corpi che interagiscono attraverso una forza di tipo $\frac{1}{r^2}$ sono "sezioni coniche", ovvero circonferenze, ellissi, parabole o iperboli. L'ellisse è la forma generale dell'orbita nel caso del "moto non-legato".
Vedremo più avanti, considerando il lancio di un satellite artificiale in direzione orizzontale da una rampa e trascurando per semplicità la resistenza dell'aria, da cosa dipende la forma dell'orbita da esso descritta.
Per ricavare la seconda legge di Kepler, occorre prima definire una grandezza chiamata "momento angolare" (o "momento della quantità di moto" o, anche, "momento cinetico").
Sia P una particella in moto rispetto ad una data terna di riferimento e $\vec{p} = m\vec{v}$ la sua quantità di moto. Si chiama "momento angolare" di P rispetto ad un punto O, il prodotto vettoriale del raggio vettore $\vec{r} = P - O$ per il vettore $\vec{p}$, cioè,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \qquad (7)$$

Nel S.I., l'unità di misura del momento angolare è il "joule secondo" [Js].
Indichiamo la derivata di una grandezza rispetto al tempo t, sovrapponendo al suo simbolo un punto (è questa la notazione di Newton per la "flussione": p. es. $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$).
Calcoliamo ora la derivata di $\vec{L}$:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (8)$$

Il risultato finale deriva dal fatto che $\dot{\vec{r}} = \vec{v}\ e\ \vec{v} \times \vec{p} = O$;
inoltre, per la seconda legge della dinamica, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.
Dalla (8) segue la legge di conservazione del momento angolare:

$$\text{se } \vec{r} \times \vec{F} = O, \qquad \vec{L} = costante. \qquad (9)$$

Consideriamo ora una particella libera soggetta ad una forza centrale $\vec{F}$: $se\ O$ è il "centro" , la forza in una posizione P è sempre diretta come il raggio vettore $\vec{r} = P - O$. Quindi $\vec{r} \times \vec{F} = O$ e si conserva il momento angolare rispetto al centro.
Poiché, per la definizione di prodotto vettoriale, i vettori $\vec{L}$ ed $\vec{r}$ sono perpendicolari fra di loro, la costanza di $\vec{L}$ significa che durante tutto il moto della particella il suo raggio vettore resta in un medesimo piano perpendicolare a $\vec{L}$.
Così, la traiettoria del moto di una particella soggetta ad una forza centrale è contenuta per intero in un piano. Introducendo le coordinate polari $r, \varphi,$ troviamo che, nel moto piano, il vettore velocità è somma di due vettori: il primo $\overrightarrow{v_r}$ è diretto come il raggio OP ed ha come componente secondo questo raggio $\dot{r}$; il secondo $\overrightarrow{v_\varphi}$ è diretto come la normale a OP ed ha come componente secondo

quest'ultima $r\dot{\varphi}$. I due scalari $\dot{r}$ e $r\dot{\varphi}$ sono, rispettivamente, la "componente radiale v_r" e la "componente trasversale v_q" della velocità:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} \qquad (10)$$

Il vettore momento angolare $\vec{L}$ rispetto al centro si può scrivere allora:

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times (\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\varphi})] = m(\vec{r} \times \overrightarrow{v_r}) + m(\vec{r} \times \overrightarrow{v_\varphi}) = m(\vec{r} \times \overrightarrow{v_\varphi}),$$

in quanto $\vec{r} \times \overrightarrow{v_r} = O$. Anzi, poiché $\vec{r}$ è normale a $\overrightarrow{v_\varphi}$, il modulo di $\vec{L}$ sarà dato da:

$$L = mr \cdot r\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = costante. \qquad (11)$$

Notiamo che per il moto piano di una particella soggetta ad una forza centrale, questa legge ammette un'interpretazione geometrica semplice. L'espressione $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ rappresenta l'area infinitesima descritta dal raggio vettore nel tempuscolo dt: la derivata $\dot{S} = \frac{1}{2}r^2\,\dot{\varphi}$ è chiamata "velocità areolare". Introducendo $\dot{S}$ nella (11), scriveremo il momento angolare della particella nella forma

$$L = 2m\dot{S}. \qquad (12)$$

La conservazione del momento angolare comporta dunque la costanza della velocità areolare. Se M_s è la massa del Sole, m quella di un pianeta, l'attrazione newtoniana è

$$F = G\frac{mM_S}{r^2},$$

o, vettorialmente,

$$\vec{F} = -G\frac{mM_S}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (13)$$

dove il segno - indica che la forza è sempre attrattiva. Essa passa per il punto fisso O al centro del Sole, che serve come origine per il raggio vettore $\vec{r}$. È pertanto una forza centrale e allora la velocità areolare (così come il momento angolare rispetto ad O) è costante: e questa è la seconda legge di Kepler.

La terza legge di Kepler, per le orbite circolari, possiamo ricavarla uguagliando la forza centripeta alla forza gravitazionale:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_S}{r^2}. \qquad (14)$$

Sostituiamo a primo membro in questa uguaglianza al posto di v il valore $2\pi r/T$ e otteniamo

$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = G\frac{M_S}{r^2}$, da cui

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}.$$

Vediamo che il rapporto r^3/T^2 dipende solo dalla massa del Sole ed è quindi lo stesso per tutti i pianeti del sistema solare. Newton riuscì a dimostrare che questo risultato vale anche nel caso delle orbite ellittiche, purché si sostituisca al raggio r il semiasse maggiore dell'ellisse:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} = 3{,}3616453 \cdot 10^{18}\ m^3/s^2 = 1(UA)^3/anni^2 \qquad (16)$$

(con $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30} kg$).
Includendo il moto del Sole, la terza legge prende la forma

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_S+m)}{4\pi^2}. \qquad (16')$$

Aggiungo che per le orbite paraboliche e iperboliche descritte dalle comete non periodiche (e dai satelliti artificiali), la prima legge di Kepler vale per quanto concerne la posizione del Sole, che occupa il fuoco della parabola o il fuoco interno dell'iperbole: la seconda legge (costanza della velocità areolare) conserva la sua validità; la terza legge, invece, la perde perché non c'è più nessun periodo di rivoluzione.

***

La teoria della gravitazione di Newton concepiva la gravità come una forza che agisce istantaneamente tra corpi distanti. Newton non tentò di spiegare "perché" la forza gravitazionale agisce attraverso il vuoto. Nel discutere questa proprietà della gravità nei suoi "Principia", egli scrisse: <<Hypotheses non fingo>> ("Non avanzo ipotesi").
La soluzione più popolare del dilemma posto dalle forze agenti a distanza fu l'invenzione dell'"etere", una delle più famose ipotesi "ad hoc" della fisica. L'ipotesi dell'etere spiegava solo ciò per la cui spiegazione era stata inventata, e non serviva ad altro. L'etere possedeva una sola proprietà, quella di trasmettere le forze agenti a distanza.
Il concetto di etere restò in voga fino agli albori del ventesimo secolo, quando fu finalmente tolto di mezzo da Einstein nella sua teoria della relatività. La teoria dell'etere fu sostituita con il tentativo di interpretazione di tutte le forze agenti a distanza basato sulla "teoria dei campi".
Chiameremo "campo scalare" una quantità scalare f definita univocamente in tutti i punti di una data regione dello spazio (per es. i campi di pressione e di temperatura).
Si chiama "campo vettoriale" un vettore $\vec{v}$ definito in grandezza e direzione in ciascun punto di una data regione dello spazio (per es. il campo di velocità e i campi di forza gravitazionale, elettrica, magnetica, etc.).
Se una massa di prova m è collocata a una distanza r da una massa-sorgente M, la forza esercitata da M su m è, secondo l'equazione (5),

$$F_{grav} = G\frac{Mm}{r^2}. \qquad (17)$$

Dividendo F_{grav} per m, si ottiene una grandezza che è caratteristica di M:

$$\frac{F_{grav}}{m} = G\frac{m}{r^2}.$$

Questa nuova grandezza, che è la "forza per unità di massa" (cioè l'"accelerazione"), è denotata con g ed indica il modulo del "campo gravitazionale" dovuto a M:

$$g = \frac{GM}{r^2}. \qquad (18)$$

La grandezza che descrive il campo gravitazionale è naturalmente, un vettore $\vec{g}$, orientato sempre "verso" la massa-sorgente M.
Una massa di prova m, collocata in questo campo gravitazionale, è soggetta a una forza data da

$$\vec{F}_{grav} = m\vec{g} \qquad (19)$$

DOMENICO BRUNO