LIMITATE CATENE DEDUTTIVE

Quesito 3- straordinaria 2023

Assegnate le rette $r: \begin{cases} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & 1+4t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = & 1 \\ 2y - z = & 3 \end{cases}$

con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s

Soluzione
Discussione sulle condizioni assegnate

La direzione della retta r, assegnata in forma parametrica, è individuata dal vettore $\vec{r}\ (1,1,4)$

Determinata anche per la seconda retta una espressione in forma parametrica

$$\begin{cases} x = & 1 \\ y = & h \\ z = & 2h+3 \end{cases}$$

si evince che s è parallela al vettore $\vec{s}\ (0,1,2)$

Le due rette non sono parallele ma non sono neppure incidenti (rette sghembe). In quanto non esiste alcun valore del parametro t tale che il punto corrispondente appartenga entrambe a entrambe.

Primo approccio

Prerequisiti

Posizioni reciproche di punti, rette e piani nello spazio
Equazione cartesiana del piano
Equazioni parametriche e cartesiane della retta

Poiché dai postulati fondamentale della Geometria sello spazio segue che un piano può essere individuato

- da tre punti non allineati
- da una retta e un punto esterno ad essa
- da due rette incidenti
- da due distinte rette parallele

le condizioni assegnate vanno utilizzate in modo da ricondurci ad uno dei casi suddetti.

Determiniamo, pertanto, una retta parallela ad s e incidente ad r .

Consideriamo il punto $P(1,0,1) \in r$, corrispondente al valore nullo del parametro t.
La retta s', parallela ad s e passante per P, ammette le seguenti equazioni parametriche

$$s' \begin{cases} x = & 1 \\ y = & k \\ z = & 1 + 2k1 \end{cases}$$

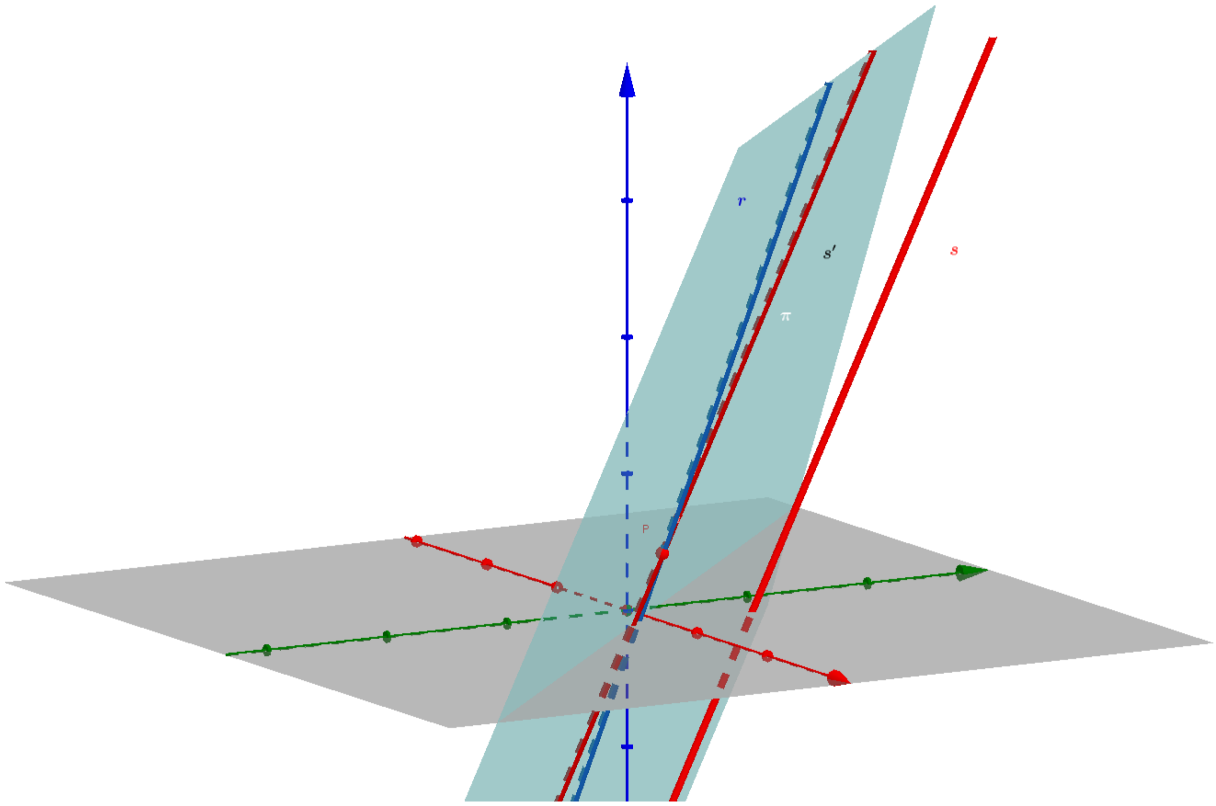
Il piano π è individuato dal punto P e da altri due punti appartenenti, rispettivamente a r e a s'
Siano $Q(0,-1,-3) \in r$ e $R(1,1,3) \in s'$
Sostituendo le coordinate di ciascun punto nell'equazione del piano generico $ax + by + cz + d = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a + c + d = & 0 \\ -b - 3c + d = & 0 \\ a + b + 3c + d = & 0 \end{cases} \text{ che ammette la soluzione} \begin{cases} a = & -2d \\ b = & -2d \\ c = & d \end{cases}$$

La terna(a, b, c) resta così determinata a meno di un fattore di proporzionalità al quale non è restrittivo assegnare valore unitario

Il piano π contenente r e parallelo ad s è il piano di equa*zione*

$$\mathbf{2x + 2y + z + 1 = 0}$$



Secondo approccio – Fascio di piani.
Prerequisiti
Fascio di piani passanti per una retta assegnata
Equazione cartesiana del piano
Vettore normale a un piano

La retta r può essere individuata come intersezione dei due piani

$$\begin{cases} x = & 1 + y \\ z = & 1 + 4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = & 0 \\ 4y - z + 1 = & 0 \end{cases}$$

Una combinazione lineare delle due equazioni rappresenta un fascio di piani passanti per r.

$$x - y - 1 + k(4y - z + 1) \rightarrow x + (4k - 1)y - kz + k - 1 = 0$$

Il vettore normale ,di componenti $(1, 4k - 1, -k)$, deve essere ortogonale a $\vec{s}$ $(0,1,2)$ pertanto il loro prodotto scalare deve essere nullo

$$1 \cdot 0 + (4k - 1) \cdot 1 - k \cdot 2 = 0 \rightarrow 2k - 1 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Equazione di π

$$x + \left(4\frac{1}{2} - 1\right)y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{2x + 2y - z - 1 = 0}$$

Terzo approccio- Proprietà dei vettori nello spazio tridimensionale

A) Prerequisiti

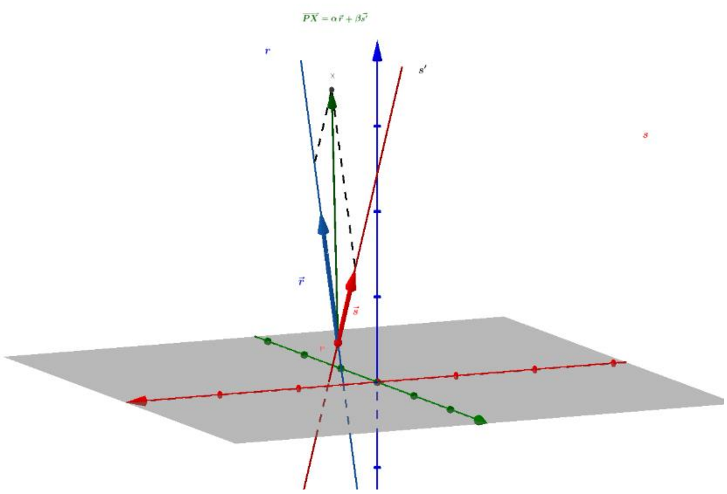
Complanarità di 3 vettori nello spazio- Equazioni parametriche di un piano

La direzione della retta r,è individuata dal vettore $\vec{r}$ $(1,1,4)$ e quella della retta s dal vettore $\vec{s}$ $(0,1,2)$. I due vettori sono linearmente indipendenti.

Il piano π è individuato dalla condizione di parallelismo ai due vettori $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ e dal passaggio per la retta r.

Considerato $P(1,0,1) \in r$, il piano π è il luogo geometrico dei punti $X\ (x, y, z)$ che danno il vettore $\overrightarrow{PX}$ come combinazione lineare di $\vec{r}$ ed $\vec{s}$
$\rightarrow$ $\overrightarrow{PX} = \alpha\,\vec{r} + \beta\vec{s}$

dove α e β sono due parametri reali non entrambi nulli



La relazione tra vettori si traduce nelle seguenti relazioni tra le rispettive componenti

$$\begin{cases} x-1 = & \alpha \\ y = & \alpha+\beta \\ z-1 = & 4\alpha+2\beta \end{cases}$$

Eliminando i due parametri si arriva all'equazione

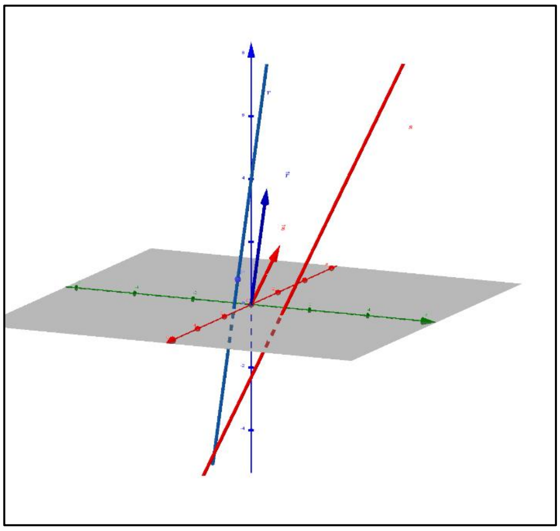
$$z-1 = 4(x-1)+2(y-x+1) \rightarrow \mathbf{2x+2y-z-1=0}$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del piano π

B) Prerequisiti

Direzione di una retta e giacitura di un piano
Equazione cartesiana del piano- Vettore normale

I due vettori $\vec{r}\ (1,1,4)$ ed $\vec{s}\ (0,1,2)$ individuano la giacitura del piano π, comune a tutti i pani ad esso paralleli, mentre il passaggio per r ne fissa la posizione nel riferimento cartesiano .



Sia $a(x-x_0)+b\,(y-y_o)+c(z-z_o)=0$ l'equazione di un piano passante per un punto assegnato di coordinate (x_0,y_0,z_0)
Sappiamo che il piano π contiene tutti i punti della retta r, in particolare il punto $P(1,0,1)$
Sappiamo altresì che il suo vettore normale $\vec{v}$, di componenti (a,b,c) è ortogonale anche ai vettori direttori di r e di s, rispettivamente, ovvero sappiamo che i prodotti scalari $\vec{v}\cdot\vec{r}$ e $\vec{v}\cdot\vec{s}$ sono nulli.
Imponendo la condizione di perpendicolarità è possibile determinare la terna (a,b,c) a meno di un fattore di proporzionalità

$$\begin{cases} a+b+4c = & 0 \\ b+2c = & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = & -2c \\ b = & -2c \end{cases}$$

Assegnando a c valore unitario, scriviamo l'equazione del piano π nella forma

$$-2(x-1)-2\,y+(z-1)=0 \rightarrow \mathbf{2x+2y-z-1=0}$$