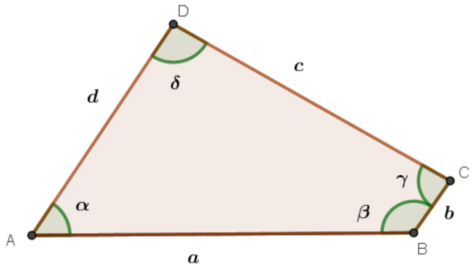
Quadrilateri ciclici di lati assegnati



Siano a, b, c, d quattro numeri positivi associati alle misure di 4 segmenti, tali che ciascuno sia minore della somma degli altri tre.

Osserviamo che è possibile costruire un quadrilatero ABCD , con $\overline{AB}$ = a ;$\overline{BC}$= b; $\overline{CD}$ = c; $\overline{DA} = d$, (come in figura) e che esistono infiniti quadrilateri aventi i lati congruenti ai segmenti assegnati.

1) Verificare che fra i quadrilateri precedenti esistono quadrilateri ciclici

Imponiamo che una coppia di angoli opposti siano supplementari

Sia $\boldsymbol{\gamma = 180° - \alpha}$

Poiché, per il teorema di Carnot, sussistono le seguenti uguaglianze

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\alpha = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{CD}\cos\gamma \rightarrow$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\alpha = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BC}\,\overline{CD}\cos\alpha$$

si ottiene

$$\cos\alpha = -\cos\gamma = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

La disuguaglianza

$\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} < 1$ *ovvero* $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 < 2(ad + bc)$ *è verificata,*
essendo

$$(a - d)^2 - (b + c)^2 < 0 \rightarrow$$

$$(a - d - b - c)(a - d + b + c) < 0$$

dove la verità dell'ultima relazione è conseguenza delle relazioni

$a < d + b + c \qquad d < a + b + c$

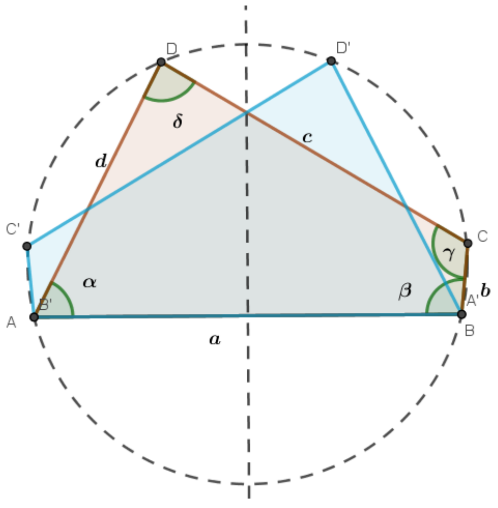
In modo analogo si dimostra che $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} > -1$

$Si\ ha\ , inoltre,\quad \cos\beta = -\cos\delta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+dc)}.$

È sempre possibile quindi determinare il valore di α in modo che il quadrilatero sia ciclico

2) Verificare che, nel caso generale in cui le misure dei lati siano quattro numeri distinti, si ottengono 3 quadrilateri distinti , a meno di isometrie

Mantenendo fisso il lato AB, di lunghezza a, possiamo permutare gli altri 3 lati in 6 modi diversi, ottenendo 3 coppie di quadrilateri tra loro congruenti, simmetrici rispetto all'asse del segmento AB.



Nella figura a lato sono rappresentati i quadrilateri corrispondenti alle permutazioni $(a, b, c, d; a, d, c, b)$

Si può verificare che lo stesso accade per le due coppie di permutazioni

$$\begin{cases} a, b, d, c \\ a, c, d, b \end{cases} \qquad \begin{cases} a, c, b, d \\ a, d, b, c \end{cases}$$

3)Verificare che l'area di un quadrilatero ciclico è invariante per ogni permutazione dell'ordine dei lati

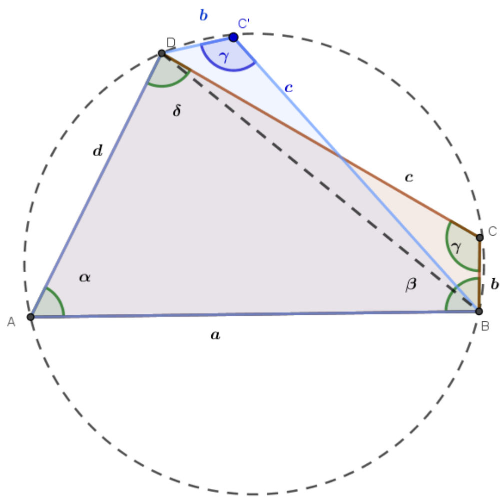
Questo risultato è una diretta conseguenza della nota formula di Brahmagupta:

$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$ dove p è il semiperimetro.

Agli studenti si può chiedere, però, una verifica diretta, di carattere geometrico, confrontando le 3 permutazioni dei lati che danno luogo a tre quadrilateri diversi

Consideriamo, per esempio i due quadrilateri ,corrispondenti alle permutazioni

(a b c d) e (a c b d)



Poiché

$$\cos\alpha = -\cos\gamma = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} \ ,$$

lasciando fissi a e d e scambiando tra di loro b e c , non cambia l'ampiezza degli angoli α e γ, né la lunghezza del segmento BD; il triangolo ABD resta immutato, mentre BCD si trasforma nel triangolo BC'D , ad esso congruente.