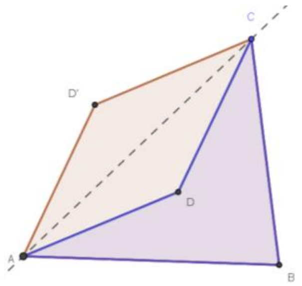
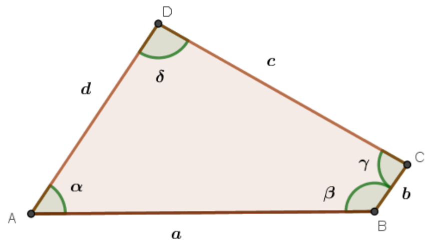
QUADRILATERI ISOPERIMETRICI – Quadrilatero di area massima

1) Fra tutti i quadrilateri aventi i lati di lunghezza assegnata, quello di area massima è quello ciclico



Osservazione :
Possiamo prendere in considerazione i soli quadrilateri convessi, in quanto, come si può osservare nella figura a lato, ogni quadrilatero concavo di lati assegnati , è strettamente contenuto in un quadrilatero convesso avente i lati della stessa lunghezza.

Dato un quadrilatero $ABCD$ di lati a, b, c, d , come rappresentato in figura ,



si può esprimere il valore dell'area S in funzione dei lati e di una coppia di angoli opposti

$$S = \frac{1}{2}ad\ \sin\alpha + \frac{1}{2}bc\ \sin\gamma$$

Dopo alcuni semplici calcoli si ottiene l'uguaglianza seguente

$$\boldsymbol{16S^2 = 4a^2d^2\sin^2\alpha + 4b^2c^2\sin^2\gamma + 8abcd\sin\alpha\sin\gamma}$$

Indicata con k la misura della diagonale BD e applicando il teorema di Carnot ai due triangoli ABD e BCD possiamo scrivere

$$k^2 = a^2 + d^2 - 2ad\ \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \rightarrow$$
$$a^2 + d^2 - (b^2 + c^2) = 2ad\ \cos\alpha - 2bc\cos\gamma \rightarrow$$

$$\boldsymbol{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2\cos^2\alpha + 4b^2c^2\cos^2\gamma - 8abcd\ \cos\alpha\cos\gamma}$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze scritte in grassetto e sfruttando alcune note identità goniometriche si ottiene

$$\boldsymbol{16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha + \gamma)}$$

Da quest'ultima espressione è facile dedurre che, fissati i valori delle lunghezze dei lati, l'area è massima quando $\boldsymbol{\cos(\alpha + \gamma) = -1}$ *, ovvero quando i lati opposti*

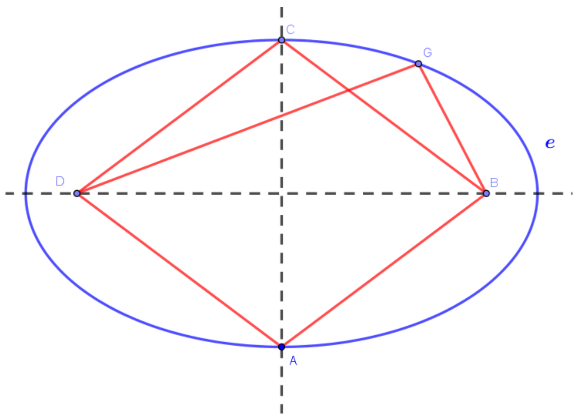
sono tra loro supplementari e, pertanto , il quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza.
Il valore massimo così ottenuto è unico in virtù della proprietà dell'area dei quadrilateri ciclici :
"Cambiando la disposizione dei lati l'area del quadrilatero ciclico (di lati fissati a, b, c, d) non cambia "

Va osservato, tra l'altro, che dall'espressione $\boldsymbol{S^2} = \frac{-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 8abcd}{16}$
si può arrivare alla formula di Brahmagupta.

2*) Fra tutti i quadrilateri isoperimetrici ,quello di area massima deve avere necessariamente i lati di uguale lunghezza*.

Osservazione:

*Sia Q un quadrilatero di vertici $ABCD$,avente i quattro lati di uguale lunghezza (rombo) ed **e** l'ellisse di fuochi B e D, avente due vertici in C e in A .*
Sia Q' un quadrilatero di vertici ABGD, dove G è un punto di e distinto da C e da A.



Dalla proprietà caratteristica dell'ellisse si deduce che $\overline{BG} + \overline{DG} = \overline{BC} + \overline{DC}$ ed è facile verificare che Q e Q' hanno uguale perimetro, ma Q ha area maggiore.

Supponiamo ora, per assurdo, che il quadrilatero Q_{max} di area massima abbia due lati (che possiamo supporre consecutivi) tra loro disuguali, per esempio AG e BG.
In analogia con la costruzione precedente, si può sempre costruire un quadrilatero Q ,isoperimetrico ma di area maggiore, sostituendo ai due lati disuguali i due segmenti DC e BC , tali che $\overline{DC} = \overline{BC}$ e $\overline{BG} + \overline{DG} = \overline{BC} + \overline{DC}$*
Si arriverebbe , pertanto, alla conclusione (assurda) : area di Q >Q_{max}*

3) Dimostrare che fra tutti i quadrilateri isoperimetrici, quello di area massima è il quadrato

Nell'insieme dei quadrilateri di perimetro assegnato $2p$, quello di area massima deve avere i lati di uguale lunghezza (pari a $\frac{p}{2}$) . Peraltro, nell'insieme dei quadrilateri (rombi) aventi i 4 lati di lunghezza assegnata pari a $\frac{p}{2}$, quello di area massima deve essere inscrivibile in una circonferenza; pertanto, è un quadrato.