Proposte di soluzioni del " problema dello spago"

Fra tutti i rettangoli di dato perimetro il quadrato ha l'area massima

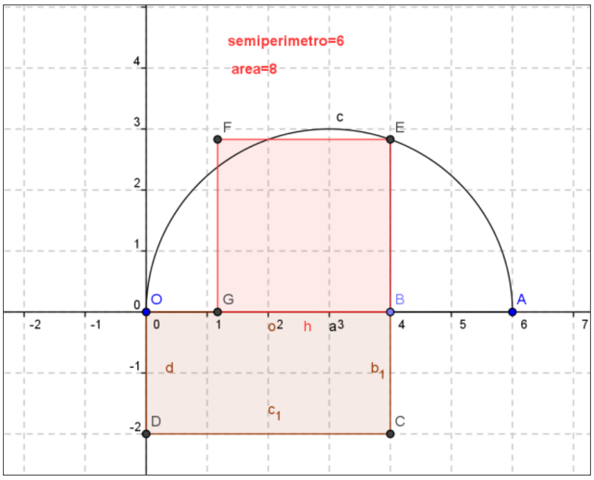
METODO SINTETICO

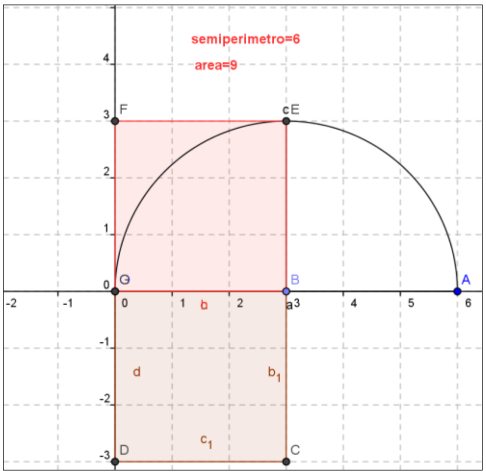
In un riferimento cartesiano Oxy , consideriamo il segmento di estremi $O(0{,}0)$ e $A(p,0)$

Sul segmento OA di lunghezza p scegliamo un punto B e costruiamo, come in figura, il rettangolo $OBCD$ le cui dimensioni sono uguali alle lunghezze dei segmenti OB e BA, rispettivamente, e il cui perimetro è, pertanto , uguale a $2p$.

Costruiamo, inoltre la semicirconferenza di diametro OA, situata nel primo quadrante.

La retta perpendicolare in B al diametro OA. incontra la semicirconferenza nel punto E , individuando il triangolo rettangolo OAE.





Applicando a quest'ultimo il secondo teorema di Euclide, avremo

$$\overline{BE}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{BA}$$

Poiché $\overline{OB} \cdot \overline{BA}$=$\overline{OB} \cdot \overline{BC}$ possiamo affermare che l'area del quadrato di lato BE è uguale all'area del rettangolo OACD.

Spostando il punto B all'interno del segmento OA, il perimetro del rettangolo resta invariato, mentre l'area varia e assume il suo valore massimo quando è massimo il segmento BE, cioè quando questo è uguale al raggio della semicirconferenza .

E' facile verificare che , in questo caso, il rettangolo è un quadrato di lato $\frac{p}{2}$ e area $\frac{p^2}{4}$

METODO ANALITICO-GRAFICO

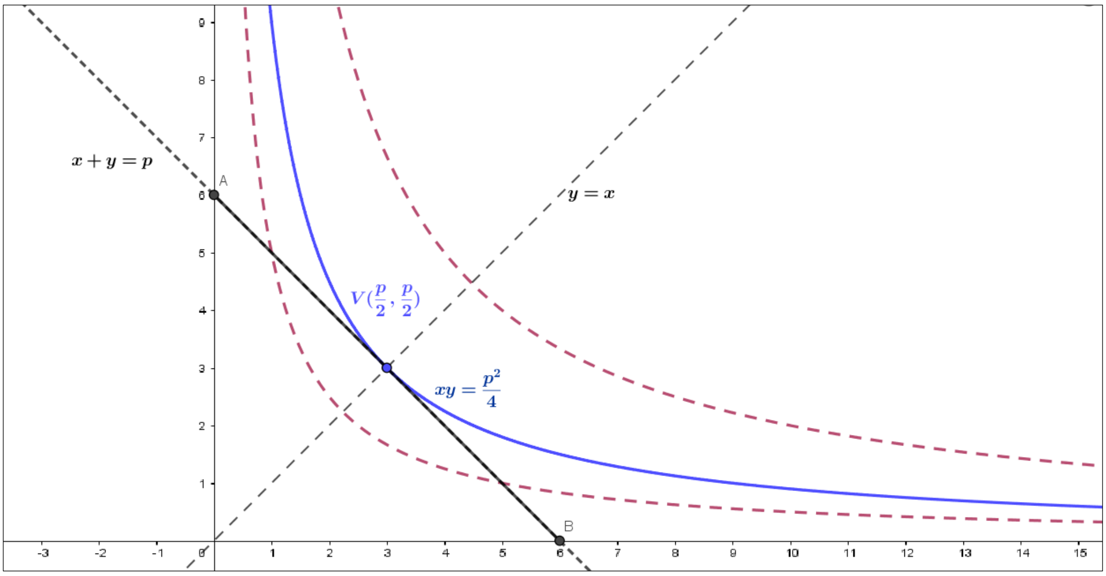
Indicate con x ed y le dimensioni del rettangolo, impostiamo il sistema risolutivo
$$\begin{cases} xy = s \\ x + y = p \\ x > 0 \cap y > 0 \end{cases}$$

che , interpretato geometricamente, fornisce le coordinate dei punti comuni ad un ramo di iperbole equilatera e ad un segmento di retta.

La retta $x + y = p$ risulta perpendicolare all'asse trasverso dell'iperbole (la retta $y = x$).

Al valore $s = \frac{p^2}{4}$ corrisponde un ramo di iperbole tangente alla retta assegnata, mentre per i valori di $s > \frac{p^2}{4}$ il sistema non ammette soluzioni.

Pertanto, il valore massimo che s può assumere corrisponde proprio al caso in cui retta e iperbole sono tra loro tangenti. Il punto di tangenza è il vertice dell'iperbole che, appartenendo alla bisettrice del primo e terzo quadrante , ha le coordinate uguali tra loro $V(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$



Si conclude pertanto che il rettangolo di area massima è il quadrato di lato $\frac{p}{2}$ e area $\frac{p^2}{4}$.

RISOLUZIONE MEDIANTE UNO STUDIO DI FUNZIONE

Indicando con x ed y le dimensioni del rettangolo, il vincolo $x + y = p$ ci permette di esprimere l'area come funzione della sola x : $S(x) = x(p - x)$

La curva associata è una parabola con la concavità verso il basso, il cui vertice ha ascissa $x = \frac{p}{2}$ e ordinata $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$. **Essendo $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ il rettangolo di area massima è il quadrato.**